













В этом состоит принципиальное отличие предложенного алгоритма от применяемых для этой цели других алгоритмов решения рассмотренной задачи, дающих гарантированно только приближенные решения.

### Заключение

Применяемое в алгоритме условие отсеечения неперспективных частичных путей имеет сравнительно простой вид и не требует выполнения сложных расчетов. В то же время его применение позволяет отбрасывать большое количество неперспективных продолжений рассматриваемых путей.

Алгоритм сформулирован для случая практической реализации его вспомогательной структуры в виде иерархически связанных однонаправленных списков. Это значительно упрощает его программную реализацию по сравнению с традиционными методами обхода деревьев. Применение его поможет устранить существенный пробел в современных графовых программных системах.

Алгоритм реализован практически на языке программирования C#.

За счет некоторого усложнения алгоритма можно сократить объем необходимой вспомогательной памяти. Для этого надо массивы вершин и ребер в узлах списков не постоянно включать в них, а удалять после того, как слой становится предыдущим и потребность в этих массивах для построения следующих слоев отпадает.

### Литература

1. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Нахождения кратчайших путей в графе. В кн.: Графы. Модели вычислений. Структуры данных. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2005. 307 с.
2. Галкина В.А. Построение кратчайших путей в ориентированном графе: В кн. Дискретная математика. Комбинаторная оптимизация на графах. М.: Гелиос АРВ, 2003. 232 с.
3. Chen D.Z. Developing algorithms and software for geometric path planning problems. ACM Computing Surveys, 1996, vol. 28, i. 4es, art. 18. DOI:10.1145/242224.242246.
4. Ittai A., Amos F., Goldberg A.V., Werneck R.F. Highway dimension, shortest paths, and provably efficient algorithms. Proc. ACM-SIAM Sympos. on Discrete Algorithms, 2010, pp. 782–793.
5. Ittai A., Daniel D., Goldberg A.V., Werneck R.F. A hub-based labeling algorithm for shortest paths on road networks. Proc. Sympos. on Experimental Algorithms, 2011, pp. 230–241.
6. Ладыженский Ю., Попов Ю. Алгоритм определения кратчайших путей между всеми узлами в графе после сжатия двух узлов // Тр. Донецкого национальн. технич. ун-та: Сер. Вычислительная техника и автоматизация. 2006. Т. 107. С. 68–75.
7. Гданский Н.И. Прикладная дискретная математика. Логика. Графы. Автоматы. Алгоритмы. Кодирование. М.: Вузовская книга, 2011. 508 с.
8. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. М.: Вильямс, 2006. 1296 с.
9. Goldberg A.V. Scaling algorithms for the shortest paths problem. SIAM J. on Computing, 1995, no. 24, vol. 3, pp. 494–504.
10. Chandracooodan N., Bhattacharyya S. Adaptive negative cycle detection in dynamic graphs. Proc. Intern. Sympos. on Circuits and Systems, 2001, pp. V-163–V-166.
11. Костюк Ю.Л. Эффективная реализация алгоритма решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ // Прикладная дискретная математика. 2013. № 2. Т. 20. С. 78–90.

Software & Systems  
DOI: 10.15827/0236-235X.031.2.260-267

Received 27.11.17  
2018, vol. 31, no. 2, pp. 260–267

### SEARCH OF MINIMAL ACYCLIC PATH IN WEIGHTED GRAPHS CONTAINING NEGATIVE WEIGHT EDGES

*N.I. Gdansky*<sup>1</sup>, *Dr.Sc. (Engineering), Professor, cpp@mami.ru*  
*N.L. Kulikova*<sup>2</sup>, *Ph.D. (Engineering), Associate Professor*  
*E.V. Chumakova*<sup>3</sup>, *Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor*

<sup>1</sup> *Moscow Polytechnic University, Sokolinaya Gora, B. Semenovskaya St. 38, Moscow, 107023, Russian Federation*

<sup>2</sup> *National Research University "MPEI", Krasnokazarmennaya St. 14, Moscow, 111250, Russian Federation*

<sup>3</sup> *Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe Highway, 4, Moscow, 125993, Russian Federation*

**Abstract.** The paper considers the problem of determining minimal acyclic routes in weighted graphs containing negative weight edges. It also investigates the possibilities of the Bellman–Ford algorithm. It is shown that in general all its possible modifications, even the deepest ones, can determine only approximate solutions. On the average, the best approximate solutions to the problem are given by a modified version of the Bellman–Ford algorithm, in which cycles are discarded when searching for optimal continuations of the desired path.

To ensure the search for exact solutions, the authors propose a modification of the branch and boundary method based on using special acyclic search trees. In the nodes of this tree, along with the number of the next vertex, the current cost of the path and the necessary pointers, there are the numbers of all the untraversed vertices, as well as a special list of negative weight

edges. A list of vertices is used for acyclic continue of a path. A list of negative weight edges is necessary to estimate the maximum possible decrease of its acyclic continue.

The paper suggests to use special bidirectional lists for more convenient practical implementation of acyclic search trees for one level vertices. In such lists, direct links specify the movement to neighboring level nodes. Back references point to the previous vertex in the path from the initial vertex to the given node.

The algorithm is described on a C-like pseudocode.

There is also an example that demonstrates the approximate character of Bellman-Ford algorithm modifications on the one hand and the work of the proposed method on the other hand.

**Keywords:** weighted graphs with negative weight edges, minimal route, Bellman-Ford algorithm, branch and bound method, search tree, bidirectional lists.

### References

1. Alekseev V.E., Talanov V.A. *Grafy. Modeli vychisleny. Struktury dannykh* [Graphs. Calculation Models. Data Structures]. N. Novgorod, Nizhegorodsky gos. univ. Publ., 2005, 307 p.
2. Galkina V.A. *Diskretnaya matematika. Kombinatornaya optimizatsiya na grafakh* [Discrete Math. Combinatorial Optimization on Graphs]. Moscow, Gelios ARV Publ., 2003, 232 p.
3. Chen D.Z. Developing algorithms and software for geometric path planning problems. *ACM Computing Surveys*. 1996, vol. 28, i. 4es, art. 18.
4. Ittai A., Amos F., Goldberg A.V., Werneck R.F. Highway Dimension, Shortest Paths, and Provably Efficient Algorithms. *Proc. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*. 2010, pp. 782–793.
5. Ittai A., Delling D., Goldberg A.V., Werneck R.F. A Hub-Based Labeling Algorithm for Shortest Paths on Road Networks. *Proc. Symp. on Experimental Algorithms*. 2011, pp. 230–241.
6. Ladyzhensky Yu., Popov Yu. An algorithm to define the shortest paths between all nodes in a graph after compressing two nodes. *Tr. Donetskogo nats. tekhnich. un-ta: Ser. Vychislitel'naya tekhnika i avtomatizatsiya* [Proc. Donetsk National Tech. Univ. Series Computing and Automation]. Donetsk, 2006, vol. 107, pp. 68–75 (in Russ.).
7. Gdansky N.I. *Prikladnaya diskretnaya matematika. Logika. Grafy. Avtomaty. Algoritmy. Kodirovanie* [Applied discrete mathematics. Logics. Graphs. Automatic Machines. Algorithms. Coding]. Moscow, Vuzovskaya kniga Publ., 2011, 508 p.
8. Cormen T.H., Leiserson Ch.E., Rivest R.L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. 3rd ed. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2009, 1296 p.
9. Goldberg A.V. Scaling algorithms for the shortest paths problem. *SIAM J. on Computing*. 1995, no. 24, vol. 3, pp. 494–504.
10. Chandrathoodan N., Bhattacharyya S. Adaptive negative cycle detection in dynamic graphs. *Proc. Int. Symp. on Circuits and Systems*. Sydney, Australia, 2001, pp. V-163–V-166.
11. Kostyuk Yu.L. Effective implementation of algorithm for solving the travelling salesman problem by branch-and-bound method. *Prikladnaya diskretnaya matematika* [Applied Discrete Mathematics]. Tomsk State Univ. Publ., 2013, no. 2, pp. 78–90 (in Russ.).

### Примеры библиографического описания статьи

1. Гданский Н.И., Куликова Н.А., Чумакова Е.В. Точное решение задачи поиска минимального ациклического пути во взвешенных графах, содержащих ребра отрицательного веса // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31. № 2. С. 260–267. DOI: 10.15827/0236-235X.031.2.260-267.
2. Gdansky N.I., Kulikova N.L., Chumakova E.V. Search of minimal acyclic path in weighted graphs containing negative weight edges. *Programmnye produkty i sistemy* [Software & Systems]. 2018, vol. 31, no. 2, pp. 260–267 (in Russ.). DOI: 10.15827/0236-235X.031.2.260-267.