УДК 004.4

DOI: 10.15827/0236-235X.123.605-613

Дата подачи статьи: 02.03.18

2018. Т. 31. № 3. С. 605–613

F-Ranking: компьютерная система для ранжирования нечетких чисел

*А.В. Радаев¹, магистрант, rad.yyhh@yandex.ru**А.В. Коробов¹, аспирант, alexander.korobov.1993@gmail.com**Б.И. Яцало¹, д.т.н., профессор, yatsalo@gmail.com*

¹ Обнинский институт атомной энергетики – филиал «Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», г. Обнинск, 249040, Россия

Во многих областях своей деятельности человек сталкивается с неопределенностями, одним из способов учета и анализа которых является использование нечетких множеств, нечеткой логики и нечетких чисел в частности. Использование нечетких чисел в рамках анализа решений неизбежно ведет к задачам их сравнения и ранжирования.

Большинство существующих систем, использующих нечеткие числа, несмотря на разнообразие методов ранжирования, применяют в своей работе лишь методы дефазификации. Однако замена нечеткого числа одним действительным числом (как и замена плотности распределения вероятностей соответствующим математическим ожиданием) неизбежно ведет к сужению и потере информации, содержащейся в исходном нечетком числе.

В работе представлена оригинальная компьютерная система F-Ranking для ранжирования нечетких чисел различного типа: в качестве входных могут использоваться треугольные, трапециевидные и кусочно-линейные (в том числе кусочно-непрерывные сверху) нечеткие числа, а также синглтоны. В системе реализованы три метода ранжирования нечетких чисел, основанных на дефазификации (методы центра тяжести, медианы и интеграла средних значений альфа-срезов), а также два метода ранжирования, основанные на оценке нечеткой приемлемости рангов (Fuzzy Rank Acceptability Analysis) с использованием двух (Юаня и интегрального) нечетких отношений предпочтения. Для последних двух методов доступны также нечеткая мера предпочтения одного нечеткого числа над другим и нечеткие индексы приемлемости рангов (Fuzzy Rank Acceptability Indexes).

В статье дано краткое описание алгоритмов указанных методов. Проведен обзор существующих систем, которые в той или иной степени могут быть использованы для ранжирования нечетких чисел. Представлены структура системы F-Ranking, входные и выходные формы для рассматриваемых методов ранжирования. Приведены примеры ранжирования нечетких чисел с использованием реализованных методов, иллюстрирующие как отличительные особенности самих методов, так и возможности всей системы F-Ranking в целом.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое число, ранжирование нечетких чисел, методы дефазификации, методы попарного сравнения, нечеткая система.

Одной из особенностей человеческого интеллекта является возможность принимать решения в условиях неполной информации и неопределенности. Теория вероятностей и теория нечетких множеств представляют в настоящее время основные методологические направления для учета и анализа неопределенностей самой различной природы. На сегодняшний день нечеткие множества находят применение в самых разных научно-технических и социально-экономических областях человеческой деятельности [1, 2].

Нечеткие числа представляют собой важное и востребованное направление в рамках теории нечетких множеств [3–5]. При этом ранжирование нечетких чисел является одной из ключевых проблем теории нечетких множеств [6]. В отличие от действительных чисел нечеткие числа не имеют естественного способа (очевидного и/или основанного на применении интуитивно понятных аксиом) их сравнения и ранжирования. В настоящее время существует более 40 методов ранжирования нечетких чисел [3, 4]. В данной работе реализованы три метода ранжирования с использованием дефазификации нечетких чисел, а также два метода ранжирования на основе попарного сравнения с применением нечетких отношений предпочтения.

Базовые понятия теории нечетких множеств и нечетких чисел

Нечеткое множество (см. [5, 7]) представляет собой расширение классического понятия множества, в котором функция принадлежности элемента множеству может принимать любые значения в интервале $[0, 1]$.

Определение 1. Нечеткое число (fuzzy number) Z представляет собой выпуклое, нормальное и ограниченное нечеткое множество, определенное на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, с непрерывной или кусочно-непрерывной сверху функцией принадлежности $\mu_z(x) \in [0, 1]$ (см. [5, 7]).

Таким образом, предполагается наличие действительных чисел $c_1, c_2, c_1 \leq c_2$, таких, что

$$Z = \{(x, \mu_z(x)) : \mu_z(x) > 0, x \in (c_1, c_2), \mu_z(x) = 0, x \notin [c_1, c_2]\}. \quad (1)$$

Всюду далее $\mathbb{F}$ представляет множество нечетких чисел согласно определению 1.

Замечание 1. Если $c_1 = c_2 = c$, $Z = c$ является синглтоном (singleton) и $\mu_z(c) = 1$.

Замечание 2. Строго говоря, условие $\mu_z(c_1) = \mu_z(c_2) = 0$ не является необходимым и часто используется для удобства, подчеркивая тем самым

наиболее используемый в приложениях вид нечетких чисел.

Определение 2. α -срез (α -cut) нечеткого числа Z , $\alpha \in (0, 1]$, представляет собой четкое множество: $Z_\alpha = [A_\alpha, B_\alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_Z(x) \geq \alpha\}$ (см. [5, 7]).

Для $\alpha = 0$ положим $[A_0, B_0] = [c_1, c_2]$ (здесь c_1, c_2 – граничные значения согласно (1)), тогда нечеткое число Z может быть идентифицировано с множеством α -срезов:

$$Z = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}, \alpha \in [0, 1]. \quad (2)$$

Определение 3. Нечеткое отношение предпочтения (fuzzy preference relation) представляет собой бинарное отношение $R = ((Z_i, Z_j), \mu_R(Z_i, Z_j))$, в котором нечеткая мера $\mu_R(Z_i, Z_j)$ отражает степень предпочтения нечеткого числа Z_i над Z_j .

Определение 4. Пусть R – нечеткое отношение предпочтения на $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, тогда для любых нечетких чисел $Z_i, Z_j \in \mathbb{F}$ их нечеткое ранжирование определяется следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} Z_i \succeq Z_j, & \text{ если } \mu_R(Z_i, Z_j) \geq 0.5; \\ Z_i \succ Z_j, & \text{ если } \mu_R(Z_i, Z_j) > 0.5; \\ Z_i \sim Z_j, & \text{ если } \mu_R(Z_i, Z_j) = 0.5. \end{aligned} \quad (3)$$

Ранжирование нечетких чисел

Методы ранжирования нечетких чисел можно разделить на три основные группы [3, 4]:

- методы дефаззификации;
- методы, основанные на оценке расстояния до эталонного множества;
- методы попарного сравнения.

В данной работе рассматриваются методы дефаззификации и попарного сравнения, представляющие собой наиболее востребованные методы ранжирования нечетких чисел.

Метод дефаззификации основан на представлении нечеткого числа A соответствующим методом четким (crisp) значением, заменяющим исходное нечеткое число в последующих оценках. В данной работе используются три метода дефаззификации: *метод центра тяжести* (Centroid Index или метод Ягера Y_1), *метод медианы* (m_A) и *метод интеграла средних значений α -срезов* (метод Ягера Y_2) [3].

Метод центра тяжести. Для нечеткого числа A , определенного на отрезке $[c_1, c_2]$ (см. определение 1), дефаззификация по методу центра тяжести происходит согласно следующей формуле [3, 9]:

$$CI(A) = \frac{\int_{c_1}^{c_2} x \mu_A(x) dx}{\int_{c_1}^{c_2} \mu_A(x) dx}, \quad (4)$$

где $CI(A)$ представляет собой центроид-индекс. Аналогом $CI(A)$ является математическое ожидание случайной величины, заданной с плотностью распределения вероятностей $\mu_A(x)/S$, где $S = \int_{c_1}^{c_2} \mu_A(x) dx$ (площадь под кривой функции принадлежности) [3, 10].

Метод медианы. Медианным значением m_A нечеткого множества A , определенного на $[c_1, c_2]$, называется такое число, для которого справедливо выражение [11]:

$$\int_{c_1}^{m_A} \mu_A(x) dx = \int_{m_A}^{c_2} \mu_A(x) dx. \quad (5)$$

Геометрически медиана представляет собой такую точку на оси абсцисс, что проведенный через нее перпендикуляр делит площадь плоской фигуры, ограниченной функцией принадлежности нечеткого множества, на две равные части.

Метод интеграла средних значений α -срезов. Для нечеткого числа Z , представленного согласно (2), по методу Ягера Y_2 вычисляется следующий интеграл [3]:

$$Y_2(Z) = \int_0^1 M(Z) d\alpha, \quad (6)$$

где $M(Z)$ – среднее значение α -среза $[A_\alpha, B_\alpha]$: $M(Z) = (A_\alpha + B_\alpha)/2$.

Методы попарного сравнения. В рамках системы ранжирования F-Ranking реализованы два метода попарного сравнения, основанные на нечетком анализе приемлемости рангов (Fuzzy Rank Acceptability Analysis, FRAA) с применением *интегрального* нечеткого отношения предпочтения – $FRAA_I$ [8], а также нечеткого отношения предпочтения Юаня [4, 8] – $FRAA_Y$.

Интегральное отношение предпочтения $R_I = (Z_i, Z_j, \mu_I(Z_i, Z_j))$ основывается на вычислении площади $S_I(Z_{ij})$ под функцией принадлежности нечеткого числа $Z_{ij} = Z_i - Z_j = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}$, а также площади $S_I^+(Z_{ij})$ под положительной частью ($x \geq 0$) данной функции принадлежности:

$$S_I^+(Z_{ij}) = \int_0^1 (B_\alpha \theta(B_\alpha) - A_\alpha \theta(A_\alpha)) d\alpha, \quad (7)$$

где $\theta(x)$ – функция Хэвисайда: $\theta(x) = \{1, x \geq 0; 0, x < 0\}$.

Степень предпочтения Z_i над Z_j вычисляется по формуле

$$\mu_I(Z_i, Z_j) = S_I^+(Z_{ij}) / S_I(Z_{ij}), S_I(Z_{ij}) > 0 \quad (8)$$

(для четких/crisp чисел Z_i, Z_j , $S_I(Z_{ij}) = 0$, для этого случая формула (8) имеет соответствующую естественную модификацию [8, 12]).

Для отношения предпочтения Юаня степень предпочтения Z_i над Z_j , $\mu_Y(Z_i, Z_j)$, также вычисляется по формуле (8) (с заменой нижнего индекса I на Y), однако S_Y^+ интерпретируется в этом случае как расстояние от положительной части нечеткого числа $Z_{ij} = Z_i - Z_j = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}$ до оси ОУ и вычисляется по формуле

$$S_Y^+(Z_{ij}) = \int_0^1 (B_\alpha \theta(B_\alpha) + A_\alpha \theta(A_\alpha)) d\alpha, \quad (9)$$

при этом

$$S_Y(Z_{ij}) = S_Y^+(Z_{ij}) + S_Y^-(Z_{ij}). \quad (10)$$

Нечеткий анализ приемлемости рангов (FRAA; Fuzzy Rank Acceptability Analysis). Рассмотренные выше нечеткие отношения предпочтения использу-

ются в нечетком анализе приемлемости ранга для ранжирования нечетких чисел [8, 12]. Метод *FRAA* базируется на оценке индексов нечеткой приемлемости рангов (Fuzzy Rank Acceptability Indices, *FRAIs*). Для оценки *FRAIs* используется модель оценки нечеткой меры утверждения/события ранга (*FRS*, Fuzzy Rank Statement) F_{ik} [8]: $F_{ik} = (Z_i, k) = \{Z_i \text{ имеет ранг } k\}$, $i, k = 1, \dots, n$.

Нечеткий индекс приемлемости ранга (*FRAI*) $\mu(i, k)$ определяется как нечеткая мера утверждения (нечеткого логического выражения) F_{ik} : $\mu(i, k) = \mu_R(F_{ik})$ для заданного отношения предпочтения R (детальное изложение свойств метода *FRAA* представлено в [12]). Для нечетких чисел Z_i , $i = 1, \dots, n$, и нечеткого отношения предпочтения R нечеткое число Z_m имеет *FRAA_R* ранг $k \in \{1, \dots, n\}$, $r(Z_m) = k$, если Z_m имеет максимальный нечеткий индекс приемлемости для ранга k :

$$\mu_R(m, k) = \max_{i=1, \dots, n} \mu_R(i, k), 1 \leq m, k \leq n. \quad (11)$$

Свойства *FRAA*-ранжирования на основе отношений предпочтения R_I (*FRAA_I*) и R_Y (*FRAA_Y*) исследованы в [12].

Существующие системы ранжирования нечетких чисел

На сегодняшний день существуют различные программные комплексы/системы, использующие нечеткие числа, в которых применяются методы сравнения и ранжирования нечетких чисел. Несмотря на разнообразие алгоритмов ранжирования, в указанных нечетких системах в основном применяются методы дефазификации. При этом существует лишь несколько систем, непосредственно предназначенных для ранжирования нечетких чисел.

Fuzzy Logic Designer (www.mathworks.com/help/fuzzy/fuzzylogicdesigner-app.html). Реализованы логические операции над нечеткими множествами со следующими функциями принадлежности: треугольная, трапецевидная, колоколообразная, Гаусса, z-образная и s-образная. Имеется возможность производить ранжирование методами дефазификации (центр тяжести, среднее максимума, наименьшее максимума, наибольшее максимума); экспорт в систему MATLAB. Программа является платной, доступна демонстрационная 30-дневная версия.

fuzzyTECH (www.fuzzytech.com). Предназначена для решения различных задач нечеткого моделирования; в системе реализованы следующие методы дефазификации: центр максимума, центр минимума, центр тяжести, среднее максимума.

FUZDYNm. В данной системе реализованы следующие методы: Ченга, Кауфманна и Гупта, Ли и Вонга, Джейна, Дубоиса и Прайда, входящие в две группы методов ранжирования (дефазификации и попарного сравнения), при этом входными величинами могут быть только *треугольные и трапеце-*

видные нечеткие числа. В [13] представлены входные и выходные формы программы.

Приложение F-Ranking

Созданная система F-Ranking является настольным приложением, разработанным на языке программирования Java (что делает приложение кроссплатформенным, для запуска требуется наличие Java Runtime Environment (JRE) v. 1.8), и может применяться для решения широкого круга задач с использованием нечетких чисел. В приложении реализованы следующие методы ранжирования нечетких чисел на основе дефазификации и попарного сравнения: метод центра тяжести, метод медианы, метод интеграла средних значений α -срезов, а также методы *FRAA_I* и *FRAA_Y*, основанные, соответственно, на нечетких отношениях предпочтения R_I (*интегральное* отношение предпочтения) и R_Y (отношение предпочтения Юаня), которые также реализованы в системе (см. <http://www.swsys.ru/uploaded/image/2018-3/2018-3-dop/28.jpg>, <http://www.swsys.ru/uploaded/image/2018-3/2018-3-dop/29.jpg> и табл. 1). Отношения предпочтения R_I и R_Y используют в своей основе нечеткую меру (степень) предпочтения числа Z_i над Z_j : $\mu_Y(Z_i, Z_j)$ и $\mu_I(Z_i, Z_j)$. В то же время в системе F-Ranking фактически реализованы также методы ранжирования, основанные на отношениях предпочтения R_Y и R_I на основе использования мер предпочтения $\mu_Y(Z_i, Z_j)$ и $\mu_I(Z_i, Z_j)$. В [12] доказано, что ранжирования заданного множества нечетких чисел по методам *FRAA_Y* и R_Y совпадают; однако *FRAA_Y*-ранжирование в отличие от ранжирования на основе отношения предпочтения R_Y дает дополнительную информацию о мере того, что нечеткое число Z_k имеет соответствующий ранг m . Показано также (см. [12], табл. 1), что ранжирование R_I не является транзитивным.

UML-диаграмма классов, реализующих методы ранжирования нечетких чисел, представлена на рисунке (см. <http://www.swsys.ru/uploaded/image/2018-3/2018-3-dop/26.jpg>).

При работе с программой пользователь задает нечеткие числа, выбирает методы ранжирования и проводит ранжирование заданного множества или подмножества нечетких чисел (рис. 1).

В программе реализованы следующие типы нечетких чисел (по функции принадлежности): синглтоны, треугольные, трапецевидные и кусочно-линейные нечеткие числа (см. <http://www.swsys.ru/uploaded/image/2018-3/2018-3-dop/27.jpg>).

Нечеткие числа с нелинейной функцией принадлежности $\mu_Z(x)$ могут быть аппроксимированы кусочно-линейной функцией с достаточной для практического применения точностью.

Ранжирование нечетких чисел может проводиться по всем или по нескольким выбранным (из списка реализованных) методам ранжирования.

Окно результатов ранжирования состоит из нескольких вкладок и позволяет сравнить полученные результаты по нескольким методам.

На первой вкладке (рис. 2) отображаются результаты ранжирования по всем выбранным методам с указанием соответствующего методу ранжирования значения: для методов дефаззификации это значения, полученные в результате дефаззификации исходных чисел, а для методов $FRAA_I$ и $FRAA_Y$ – максимальная, согласно $FRAA$ -ранжированию, нечеткая мера (степень/мера уверенности), что число принадлежит данному рангу.

Для методов попарного сравнения можно также получить значения нечетких индексов приемлемости $FRAIs$ в виде таблицы и графика (рис. 3). Например, при использовании интегрального отношения предпочтения R_I нечеткое число Z_2 принадлежит рангу 1 с мерой уверенности 0.643 – $\mu_I(2, 1) = 0.643$, рангу 2 с мерой 0.357 – $\mu_I(2, 2) = 0.357$ и рангу 3 с мерой 0.057 – $\mu_I(2, 3) = 0.057$.

Кроме того, для всестороннего анализа полученных результатов по методам попарного сравнения R_Y и R_I существует возможность рассмотреть значения меры превосходства $\mu_R(Z_i, Z_j)$ одного числа над другими (см. <http://www.swsys.ru/uploaded/image/2018-3/2018-3-dop/28.jpg>).

В программе доступны русский и английский языки (переключение: File>Language). Настройка параметров программы (количество знаков после точки и т.д.) производится в меню File > Settings. Кроме того, имеется возможность сохранить вве-

денные нечеткие числа для их повторного использования. Для отображения нечетких чисел на правой панели (рис. 1) используется свободная библиотека jFreeChart.

Примеры использования системы F-Ranking

Представим ряд примеров, иллюстрирующих работу созданной системы с использованием нечетких чисел с функциями принадлежности треугольной, трапециевидной и кусочно-линейной формы и всеми методами ранжирования, реализованными в системе.

Пример 1. Рассмотрим три множества (S_1, S_2, S_3) треугольных нечетких чисел (рис. 4), визуальное/интуитивное ранжирование которых невозможно:

$$S_1: Z_1 = (11, 13.95, 16.91), \\ Z_2 = (13.9, 13.95, 14), Z_3 = (10, 14.95, 16.29); \quad (12)$$

$$S_2: Z_1 = (11, 13.95, 16.91), \\ Z_2 = (13.9, 13.95, 14), Z_3 = (10, 14.95, 16.3); \quad (13)$$

$$S_3: Z_1 = (11, 13.95, 16.9), \\ Z_2 = (13.9, 13.95, 14), Z_3 = (10, 14.95, 16.3). \quad (14)$$

С использованием системы F-Ranking (см. <http://www.swsys.ru/uploaded/image/2018-3/2018-3-dop/29.jpg>) результаты ранжирования указанных

нечетких чисел по всем методам, представленным в системе, приведены в таблице 1.

По результатам, представленным в таблице 1, можно видеть, что *интегральное* отношение предпочтения не является транзитивным.

В таблице 2 приведено ранжирование рассмотренных выше нечетких чисел с указанием соответствующего методу дефаззификации (Centroid Index, Median, Y_2) значения; для методов $FRAA_I$ и $FRAA_Y$ указана максимальная мера принадлежности данному рангу. Можно видеть, что для методов центра тяжести и медианы порядок рангов совпадает, а метод Y_2 (метод интеграла средних значений α -срезов) имеет такой же порядок рангов, как и методы попарного сравнения. Кроме того, ранжирование указанных нечетких чисел по методам $FRAA_I$ и $FRAA_Y$ совпадает для чисел из множества S_1 и S_2 и отличается для множества S_3 . При этом показано также, что $FRAA_I$ – ранжирование, основанное на нетранзитивном отношении предпочтения R_I , обладает свойством множественности рангов.

Необходимо отметить, что модели нетранзитивных отношений, имеющих место в реальном мире, привлекают внимание исследователей [14, 15]. Нечеткое отношение предпочтения R_I , являющееся одним из наиболее интуитивно понятных среди имеющихся отношений предпочтения, а также основанный на концепции нечеткой приемлемости метод ранжирования $FRAA_I$ являются одной из немногих моделей исследования иррациональных/нетранзитивных порядков. Отметим также, что *обобщенный* метод ранжирования $FRAA_I$ является транзитивным [12].

Пример 2. Рассмотрим множество нечетких чисел S_4 (A, B – трапецевидные, C – треугольное) (рис. 5):

$$S_4: A = (1, 2, 5, 7), B = (2, 3, 5, 5.2), C = (5, 6, 7). \quad (15)$$

Рис. 5. Нечеткие числа A, B, C из множества S_4

Fig. 5. Fuzzy numbers A, B, C of the set S_4

С помощью системы F-Ranking было проведено ранжирование нечетких чисел A, B из множества S_4 (15) по методу центра тяжести, в результате были получены значения $CI(A) = 3.778$, $CI(B) = 3.785$ соответственно. Из этого следует:

$$B > A. \quad (16)$$

Рассмотрим множество S_5 (рис. 6) трапецевидных нечетких чисел, полученных в результате сложения чисел из множества S_4 (15):

$$S_5: A + C = (6, 8, 11, 14), B + C = (7, 9, 11, 12.2). \quad (17)$$

По методу центра тяжести нечеткие числа $A + C, B + C$ из множества S_5 (17) имеют значения

Ранжирование (сравнение) нечетких чисел Z_1, Z_2, Z_3 из множеств S_1, S_2, S_3 (12–14) по методам дефаззификации (Centroid Index, Median, Y_2) и методам попарного сравнения R_I и R_Y

Таблица 1

Table 1

Ranking of fuzzy numbers Z_1, Z_2, Z_3 of the sets S_1, S_2, S_3 (12–14) by defuzzification methods (Centroid Index, Median, Y_2) and pairwise comparison methods R_I and R_Y

Множество	Centroid Index	Median	Y_2	R_I	R_Y
S_1	$Z_1 > Z_2 > Z_3$	$Z_1 > Z_2 > Z_3$	$Z_3 > Z_1 > Z_2$	$Z_1 > Z_2, Z_2 > Z_3, Z_3 > Z_1$	$Z_3 > Z_1 > Z_2$
S_2	$Z_1 > Z_2 > Z_3$	$Z_1 > Z_2 > Z_3$	$Z_3 > Z_1 > Z_2$	$Z_1 > Z_2, Z_2 \sim Z_3, Z_3 > Z_1$	$Z_3 > Z_1 > Z_2$
S_3	$Z_1 > Z_2 > Z_3$	$Z_1 > Z_2 > Z_3$	$Z_3 > Z_1 > Z_2$	$Z_1 \sim Z_2, Z_2 \sim Z_3, Z_3 > Z_1$	$Z_3 > Z_1 \sim Z_2$

Ранги нечетких чисел Z_1, Z_2, Z_3 из множеств S_1, S_2, S_3 (12–14) по всем методам, реализованным в системе F-Ranking

Таблица 2

Table 2

Ranks of fuzzy numbers Z_1, Z_2 , and Z_3 of the sets S_1, S_2, S_3 (12–14) by all methods implemented in F-Ranking

Множество	Ранги	Centroid Index	Median	Y_2	$FRAA_I$	$FRAA_Y$
S_1	1	Z_1 (13.953)	Z_1 (13.953)	Z_3 (14.047)	Z_3 (0.499)	Z_3 (0.515)
	2	Z_2 (13.95)	Z_2 (13.95)	Z_1 (13.953)	Z_1 (0.501)	Z_1 (0.501)
	3	Z_3 (13.747)	Z_3 (13.946)	Z_2 (13.95)	Z_2 (0.499)	Z_2 (0.501)
S_2	1	Z_1 (13.953)	Z_1 (13.953)	Z_3 (14.05)	Z_3 (0.5)	Z_3 (0.516)
	2	Z_2 (13.95)	Z_2 (13.95)	Z_1 (13.953)	Z_1 (0.501)	Z_1 (0.501)
	3	Z_3 (13.75)	Z_3 (13.949)	Z_2 (13.95)	Z_2 (0.5)	Z_2 (0.501)
S_3	1	Z_1 (13.95)	Z_1 (13.95)	Z_3 (14.05)	Z_2 (0.5), Z_3 (0.5)	Z_3 (0.516)
	2	Z_2 (13.95)	Z_2 (13.95)	Z_1 (13.95)	Z_1 (0.5), Z_2 (0.5), Z_3 (0.5)	Z_1 (0.5), Z_2 (0.5)
	3	Z_3 (13.75)	Z_3 (13.949)	Z_2 (13.95)	Z_1 (0.5), Z_2 (0.5)	Z_1 (0.5), Z_2 (0.5)

9.788 и 9.77 соответственно. Из этого следует:

$$A + C \succ B + C. \quad (18)$$

Таким образом, из (16) и (18) следует, что для метода центра тяжести $A \succeq B \not\Rightarrow A + C \succeq B + C$ [3].

Рис. 6. Нечеткие числа $A + C$, $B + C$ из множества S_5

Fig. 6. Fuzzy numbers $A + C$, $B + C$ of the set S_5

Пример 3. Рассмотрим множество кусочно-линейных нечетких чисел S_6 (рис. 7):

$$A = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ 1, & \text{если } 1 \leq x \leq 1, \\ 0.05, & \text{если } 2 < x \leq 15, \\ 0, & \text{если } x > 15, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2.5, \\ 1, & \text{если } 2.5 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{если } x > 5, \end{cases} \quad (19)$$

$$C = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ 1, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 0.3, & \text{если } 2 < x \leq 10, \\ 0, & \text{если } x > 10. \end{cases}$$

По методу центра тяжести нечеткие числа A и B из множества S_6 (19) имеют значения $CI(A)=4.258$, $CI(B)=3.75$ соответственно. Из этого следует

$$A \succ B. \quad (20)$$

Рассмотрим множество S_7 (рис. 8) кусочно-линейных нечетких чисел $A + C$, $B + C$:

$$A + C = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2, \\ 1, & \text{если } 2 \leq x \leq 5, \\ 0.3, & \text{если } 5 < x \leq 12, \\ 0.05, & \text{если } 12 < x \leq 25, \\ 0, & \text{если } x > 25, \end{cases}$$

$$B + C = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3.5, \\ 1, & \text{если } 3.5 \leq x \leq 8, \\ 0.3, & \text{если } 8 < x \leq 15, \\ 0, & \text{если } x > 15. \end{cases} \quad (21)$$

По методу центра тяжести нечеткие числа $A + C$, $B + C$ из множества S_7 (21) имеют значения 7.022, 7.58 соответственно. Из этого следует

$$B + C \succ A + C. \quad (22)$$

Таким образом, из (20) и (22) следует, что для метода центра тяжести и заданных нечетких чисел A , B , C с кусочно-линейной функцией принадлежности $A \succeq B \not\Rightarrow A + C \succeq B + C$ [3].

Пример 4. Рассмотрим множество треугольных нечетких чисел S_8 (рис. 9):

$$S_8: Z_1 = (0, 2.3, 4), Z_2 = (0.2, 1.55, 4.5), \\ W = (0.043, 0.1735, 0.304). \quad (23)$$

Рис. 7. Нечеткие числа A , B , C из множества S_6

Fig. 7. Fuzzy numbers A , B , C of the set S_6

Рис. 8. Нечеткие числа $A + C$, $B + C$ из множества S_7

Fig. 8. Fuzzy numbers $A + C$, $B + C$ of set S_7

Рис. 9. Нечеткие числа Z_1 , Z_2 и W из множества S_8

Fig. 9. Fuzzy numbers Z_1 , Z_2 , and W of the set S_8

По методу центра тяжести нечеткие числа Z_1 и Z_2 из множества S_8 (23) имеют значения 2.1 и 2.083 соответственно. Из этого следует

$$Z_1 \succ Z_2. \quad (24)$$

В отличие от двух предыдущих примеров, исследующих сложения исходных множеств, рассмотрим множество чисел S_9 (рис. 10), полученных в результате перемножения чисел из множества S_8 (23):

$$S_9: Z_1 \times W, Z_2 \times W. \quad (25)$$

По методу центра тяжести нечеткие числа $Z_1 \times W$ и $Z_2 \times W$ из множества S_9 (25) имеют значения 0.494 и 0.506 соответственно. Из этого следует

$$Z_2 \times W \succ Z_1 \times W. \quad (26)$$

Таким образом (так же, как и в случае сложения в примерах 2, 3), из (24) и (26) следует, что для метода центра тяжести (и положительного нечеткого числа W) $Z_1 \succeq Z_2 \not\Rightarrow Z_1 \times W \succeq Z_2 \times W$.

Пример 5. Рассмотрим множество треугольных нечетких чисел S_{10} (рис. 11):

$$S_{10}: Z_1 = (1, 1.2, 8.2), Z_2 = (1, 4, 4.5), \\ W = (0.043, 0.1735, 1.3). \quad (27)$$

По аналогии с предыдущим примером перемножим числа из (27), в результате получим нечеткие числа множества S_{11} (рис. 12):

$$S_{11}: Z_1 \times W, Z_2 \times W. \quad (28)$$

Ранжирование методом Юаня чисел из множеств S_{10} (27) и S_{11} (28) приводит к следующим результатам: $\mu(Z_2, Z_1) = 0.577$, $\mu(Z_1 \times W, Z_2 \times W) = 0.556$. Из этого следует, что для метода Юаня $Z_2 \succeq Z_1 \nRightarrow Z_2 \times W \succeq Z_1 \times W$.

Анализируя данный пример, можно отметить, что порядок ранжирования нарушается не только для метода центра тяжести, но и для других методов ранжирования.

Рис. 10. Нечеткие числа $Z_1 \times W, Z_2 \times W$ из множества S_9

Fig. 10. Fuzzy numbers $Z_1 \times W$ and $Z_2 \times W$ of the set S_9

Рис. 11. Нечеткие числа Z_1, Z_2, W из множества S_{10}

Fig. 11. Fuzzy numbers Z_1, Z_2 and W of the set S_{10}

Рис. 12. Нечеткие числа $Z_1 \times W, Z_2 \times W$ из множества S_{11}

Fig. 12. Fuzzy numbers $Z_1 \times W, Z_2 \times W$ of the set S_{11}

В примере 5 вычисления производятся с десятью альфа-срезами. Для проверки корректности работы приложения F-Ranking нечеткие числа из множества S_{10} (27) были перемножены с разбиением на 20 альфа-срезов. После ранжирования были получены следующие результаты (для наглядности значения приведены с 7 знаками после десятичной точки): 10 альфа-срезов: $\mu(Z_2, Z_1) = 0.5774372$, $\mu(Z_1 \times W, Z_2 \times W) = 0.5557413$, 20 альфа-срезов: $\mu(Z_2, Z_1) = 0.5774372$, $\mu(Z_1 \times W, Z_2 \times W) = 0.5550221$. Для сравнения: при 30 альфа-срезах $\mu(Z_1 \times W, Z_2 \times W) = 0.5549033$, то есть различие с аналогичным значением для 20 альфа-срезов составляет около 10^{-4} .

Таким образом, можно говорить о корректности работы приложения F-Ranking; при этом количество альфа-срезов можно варьировать в зависимости от требований к точности выходных результатов.

Заключение

Система F-Ranking предоставляет широкие возможности для сравнения и ранжирования нечетких чисел. Она является особенно востребованной в случаях, когда визуальное/интуитивное ранжирование нечетких чисел невозможно (пример 1). Кроме того, система эффективна для проведения научных исследований (примеры 2–5). Наличие в программе сразу нескольких методов ранжирования: центра тяжести, медианы, интеграла средних значений α -срезов, а также метода Юаня и интегрального метода, в том числе дополнительных инструментов анализа при использовании двух последних методов, позволяет получить более полное представление о ранжируемых числах. Указанные характеристики делают систему F-Ranking удобным инструментом при решении широкого спектра научно-прикладных задач с использованием нечетких чисел. Программа спроектирована с учетом возможности добавления в нее других методов ранжирования. Разработанные программные библиотеки для ранжирования нечетких чисел используются в методах нечеткого многокритериального анализа решений для ранжирования альтернатив в условиях неопределенности.

Литература

1. Hatagar S., Halase S. Three input–one output fuzzy logic control of washing machine. Intern. J. of Sc. Research Eng. & Technology (IJSRET), 2015, vol. 4, pp. 57–62.
2. Samuel E.K. Fuzzy logic and its practical use in mass transit systems. 2005. URL: <http://skisko.blogspot.com/2005/06/fuzzy-logic-and-its-practical-use-in.html> (дата обращения: 26.12.2017).
3. Wang X., Kerre E. E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). Fuzzy Sets and Systems, 2001, vol. 118, no. 3, pp. 375–385.
4. Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II). Fuzzy Sets and Systems, 2001, vol. 118, no. 3, pp. 387–405.
5. Lee K.H. First course on fuzzy theory and applications. Springer Science & Business Media, 2006, vol. 27, 341 p.
6. Matarazzo B., Munda G. New approaches for the compare-

son of L–R fuzzy numbers: a theoretical and operational analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, vol. 118, no. 3, pp. 407–418.

7. Hanss M. *Applied Fuzzy Arithmetic An Introduction with Engineering Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, 261 p.

8. Yatsalo B., Korobov A., Martínez L. Fuzzy multi-criteria acceptability analysis: A new approach to multi-criteria decision analysis under fuzzy environment. *Expert Systems With Applications*, 2017, vol. 84, pp. 262–271.

9. Allahviranloo T., Saneifard R. Defuzzification method for ranking fuzzy numbers based on center of gravity. *Iranian J. of Fuzzy Systems*, 2012, vol. 9, no. 6, pp. 57–67.

10. Ротштейн А.П., Штовба С.Д. Влияние методов дефазификации на скорость настройки нечеткой модели // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 5. С. 169–176.

11. Saneifard R., Saneifard R. The median value of fuzzy numbers and its applications in decision making. *J. of Fuzzy Set Valued Analysis*, 2012, vol. 2012, pp. 1–9.

12. Yatsalo B., Martínez L. Fuzzy rank acceptability analysis: a confidence measure of ranking fuzzy numbers. *Proc. IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2018.2838063>.

13. Kahraman C., Bozdağ C.E. Fuzzy investment analysis using capital budgeting and dynamic programming techniques. *Computational Intelligence in Economics and Finance*. Springer Berlin Heidelberg, 2004, pp. 93–128.

14. Klimenko A.Y. Intransitivity in theory and in the real world. *Entropy*, 2015, vol. 17, no. 6, pp. 4364–4412.

15. Fishburn P.C. Nontransitive preferences in decision theory. *J. of Risk and Uncertainty*, 1991, vol. 4, no. 2, pp. 113–134.

Software & Systems

DOI: 10.15827/0236-235X.123.605-613

Received 02.03.18

2018, vol. 31, no. 3, pp. 605–613

F-Ranking: a computer system for ranking fuzzy numbers

A.V. Radaev¹, M.S. Graduate Student, rad.yyh@yandex.ru

A.V. Korobov¹, Postgraduate Student, alexander.korobov.1993@gmail.com

B.I. Yatsalo¹, Dr.Sc. (Engineering), Professor, yatsalo@gmail.com

¹ Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering of the National Research Nuclear University "MPhI", Obninsk, 249040, Russian Federation

Abstract. In many areas of human activities, people face uncertainties. One of the ways of handling and analyzing uncertainties is using fuzzy sets including fuzzy logic and fuzzy numbers. The use of fuzzy numbers within decision analysis inevitably leads to the problems of their comparison and ranking.

Despite the variety of ranking methods, the majority of the existing systems with fuzzy numbers use only defuzzification methods. However, the replacement of a fuzzy number by one real number (like the replacement of the probability distribution density by the corresponding mathematical expectation) inevitably leads to narrowing and loss of information in the original fuzzy number.

The paper presents an original computer system F-Ranking for ranking different fuzzy numbers. The system allows using fuzzy numbers with singletons, triangular, trapezoidal and piecewise (including sectionally continuous from above) fuzzy numbers as input data. F-Ranking system includes six methods for ranking fuzzy numbers based on defuzzification: three defuzzification based ranking methods (a centroid index, median, and an integral of alpha-cut mean values) along with two ranking methods based on pairwise comparison (Fuzzy Rank Acceptability Analysis) using Integral and Yuan's fuzzy preference relations. For the last two methods, a preference fuzzy measure of one fuzzy number over another as well as Fuzzy Rank Acceptability Indexes are available.

The paper briefly describes the algorithms of the mentioned methods. The authors make a review of existing systems, which can be used for ranking fuzzy numbers. There is the structure of F-Ranking system with input/output forms and examples of ranking fuzzy numbers using different methods. These examples show the features of the ranking methods under consideration as well as the possibilities of F-Ranking system in general.

Keywords: fuzzy number, fuzzy set, ranking fuzzy numbers, defuzzification methods, pairwise comparison methods, fuzzy system.

References

1. Hatagar S., Halase S.V. Three input–one output fuzzy logic control of washing machine. *Intern. J. of Scientific Research Engineering & Technology (IJSRET)*. 2015, vol. 4, pp. 57–62.

2. Samuel E.K. *Fuzzy Logic and its Practical use in Mass Transit Systems*. 2005. Available at: <http://skisko.blogspot.com/2005/06/fuzzy-logic-and-its-practical-use-in.html> (accessed December 26, 2017).

3. Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). *Fuzzy Sets and Systems*. 2001, vol. 118, no. 3, pp. 375–385.
4. Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II). *Fuzzy Sets and Systems*. 2001, vol. 118, no. 3, pp. 387–405.
5. Lee K.H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg Publ., 2006, vol. 27, 341 p.
6. Matarazzo B., Munda G. New approaches for the comparison of L–R fuzzy numbers: a theoretical and operational analysis. *Fuzzy Sets and Systems*. 2001, no. 118, pp. 407–418.
7. Hanss M. *Applied Fuzzy Arithmetic: an Introduction with Engineering Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg Publ., 2005, 261 p.
8. Yatsalo B., Korobov A., Martínez L. Fuzzy multi-criteria acceptability analysis: A new approach to multi-criteria decision analysis under fuzzy environment. *Expert Systems with Applications*. 2017, no. 84, pp. 262–271.
9. Allahviranloo T., Saneifard R. Defuzzification method for ranking fuzzy numbers based on center of gravity. *Iranian J. of Fuzzy Systems*. 2012, no. 9, pp. 57–67.
10. Rotshteyn A.P., Shtovba S.D. The influence of defuzzification methods on fuzzy model tuning speed. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2002, no. 1, pp. 169–176.
11. Saneifard R., Saneifard R. The median value of fuzzy numbers and its applications in decision making. *J. of Fuzzy Set Valued Analysis*. 2012, vol. 2012, pp. 1–9.
12. Yatsalo B., Martinez L. Fuzzy rank acceptability analysis: A confidence measure of ranking fuzzy numbers. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*. 2018.
13. Kahraman C., Bozdağ C.E. Fuzzy investment analysis using capital budgeting and dynamic programming techniques. *Computational Intelligence in Economics and Finance*. Springer Berlin Heidelberg Publ., 2004, pp. 93–128.
14. Klimenko A.Y. Intransitivity in theory and in the real world. *Entropy*. 2015, no. 17, pp. 4364–4412.
15. Fishburn P.C. Nontransitive preferences in decision theory. *J. of Risk and Uncertainty*. 1991, no. 4, pp. 113–134.

Примеры библиографического описания статьи

1. Радаев А.В., Коробов А.В., Яцало Б.И. F-Ranking: компьютерная система для ранжирования нечётких чисел // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31. № 3. С. 605–613. DOI: 10.15827/0236-235X.123.605-613.
2. Radaev A.V., Korobov A.V. F-Ranking: a computer system for ranking fuzzy numbers. *Software & Systems*. 2018, vol. 31, no. 3, pp. 605–613 (in Russ.). DOI: 10.15827/0236-235X.123.605-613.