

УДК 004.928
DOI: 10.15827/0236-235X.140.748-757

Дата подачи статьи: 06.06.22, после доработки: 29.08.22
2022. Т. 35. № 4. С. 748–757

Моделирование деформации эластичных объектов с использованием функций возмущения

С.И. Вяткин¹, к.т.н., старший научный сотрудник, sivser@mail.ru
Б.С. Долговесов¹, к.т.н., зав. лабораторией, bsd@iae.nsk.su

¹ Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
лаборатория синтезирующих систем визуализации, г. Новосибирск, 630090, Россия

В статье представлен метод моделирования деформации эластичных объектов с использованием функций возмущения. Описываются деформации упругих материалов, способных растягиваться таким образом, чтобы вернуться к первоначальной форме и размеру при высвобождении силы. В методе применяются дифференциальные уравнения второго порядка и операторные функции в экспоненциальной интеграции. В результате уменьшается время вычислений и повышается общая точность. Метод легко распараллеливается и позволяет визуализировать сложные реалистичные модели. За счет параллельной обработки и отсутствия необходимости пересылки большого количества данных из общей памяти в память графического процессора увеличивается скорость визуализации по сравнению с вариантом, использующим только центральный процессор.

Рассматривается способ задания объектов, отличный от полигонального описания. Для задания объекта используются базовая форма и набор возмущений. Такой подход позволяет уменьшить расходы на память и повысить качество изображения.

Перечисляются задачи, решаемые при моделировании анимации и деформации тел с применением уравнений эластодинамики. Описывается адаптация уравнений эластодинамики для экспоненциального интегрирования. Экспоненциальные методы хорошо подходят для жестких систем при решении сложных задач. Для жесткой системы применяется интегратор времени в масштабе общего движения объекта с достаточной точностью.

Рассматривается экспоненциальная обработка при дискретизации временной переменной на некотором интервале. Экспоненциальное интегрирование строится с помощью квадратуры для нелинейного интеграла, что приводит к жестко точному методу, необходимому для экономии вычислительных ресурсов по сравнению с классическими методами. Предлагается жестко точный метод с использованием адаптированной схемы с постоянным временным шагом. Во избежание явного предварительного вычисления квадратного корня для больших систем используется итерация квадратного корня Ньютона.

Представлены результаты тестирования метода и сравнения с классическим и современными подходами для жестких систем. Для определения точности задания функционально заданных объектов вычисляются буфер глубины моделей (функциональной и полигональной) и сравниваются точки для оценки средней разницы в глубине. Таким образом, оценивается среднее отклонение относительно всей модели.

Ключевые слова: функция возмущения, моделирование эластичных объектов, дифференциальное уравнение, деформация упругих материалов, экспоненциальная интеграция.

Численное интегрирование по времени жестких систем дифференциальных уравнений является одной из главных задач численного анализа. В задачах эластодинамики неоднородных материалов, которые характеризуются переменными свойствами, проблема усложняется наличием бесконечного дискретного спектра. Это ведет к снижению вычислительной эффективности, особенно если дифференциальные уравнения являются жесткими. Жесткая система обыкновенных дифференциальных уравнений – это система, численное решение которой явными методами неудовлетво-

рительно из-за резкого увеличения числа вычислений или резкого возрастания погрешности при недостаточно малом шаге [1, 2].

Явные методы требуют меньшего количества вычислений за один временной шаг, но обладают худшими свойствами стабильности в сравнении с неявными методами, которые стабильны и обеспечивают точную интеграцию с гораздо большими временными шагами. Однако увеличение размера временного шага требует большего количества вычислений в каждой временной итерации. Тем не менее, для сложных задач интегрирование уравнений в

явном виде требует больших вычислений [3, 4].

Для жестких систем неявные методы дают лучший результат, чем явные методы [5, 6]. В работе [7] представлены вычислительные стратегии переменного шага, а также переменного порядка для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Описаны интерполяционные формулы Ньютона в сочетании с разделенной разностью в качестве аппроксимации базисной функции. Проведен анализ производительности переменного шага и переменного порядка.

Основанная на ограничениях формулировка стабильных нео-гуковских материалов приведена в статье [8]. В работе [9] предлагается интерактивное моделирование нелинейных деформируемых объектов, описываются моделирование деформации, анимации и столкновения тел. Разработано высококачественное объемное приближение сложных трехмерных форм. Анализ производительности моделирования геометрических метаматериалов приведен в [10]. Моделирование сложных геометрических структур сопряжено с высокими вычислительными затратами. Анализируется влияние выборки полного пространства параметров уменьшенной модели по сравнению с полной.

В [11] предлагается метод анимации поверхности деформированной сетки с учетом механики, используя треугольные деформации для интерполяции предварительно вычисленной геометрии. Представлена геометрическая, не зависящая от времени деформация [12]. С ее помощью реализуются локальные контакты между упругими объектами, в том числе самопроизвольные столкновения между соседними частями одного и того же объекта. В статье [13] предлагается метод интеграции с сохранением энергии и импульса для решения проблемы их нежелательного рассеивания. При моделировании деформации важной задачей является вычисление градиента и производной функции энергии деформации. Это необходимо для вывода матрицы внутренней силы и касательной жесткости.

В статье [14] предложена конечно-разностная схема со сложным шагом для решения этой задачи. В качестве альтернативы неявным методам существуют экспоненциальные методы для решения сложных задач. Также разработаны экспоненциальные методы, которые подходят для жестких систем [15, 16]. Однако эти методы не были широко освещены для приложений визуальных вычислений, таких как моделирование задач эластодинамики [17, 18].

Целью данного исследования является разработка метода моделирования деформации эластичных объектов с использованием функций возмущения. Предлагается подход для моделирования задач эластодинамики. Описана математическая формулировка данной задачи. Применяется экспоненциальная обработка полного оператора нелинейного воздействия. Используются точный экспоненциальный метод и оптимизированный адаптивный алгоритм проекции Крылова. Приводятся вычислительные преимущества по сравнению с известными методами моделирования задач эластодинамики, применяемых в приложениях визуальных вычислений. Предлагаемый метод обеспечивает высокую точность, а экспоненциальная интеграция значительно экономит вычислительные ресурсы при моделировании задач эластодинамики. Метод позволяет работать с системами большого размера и сложности и актуален для практических приложений.

Описание метода

Свободные формы описываются с помощью задания функций возмущения от базовых треугольников (рис. 1, 2), плоскостей и квадрик (рис. 3) [19, 20].

Свободная форма состоит из базовой поверхности и возмущений:

$$F'(x, y, z) = F(x, y, z) + \sum_{i=1}^N R_i(x, y, z). \quad (1)$$

Функция возмущения $R(x, y, z)$ вычисляется следующим образом:

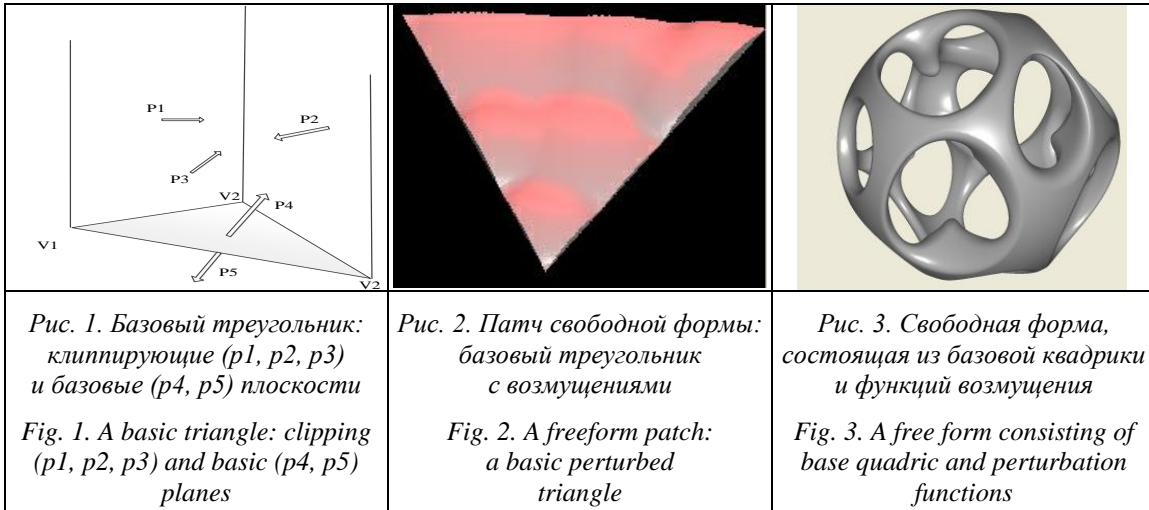
$$R_i(x, y, z) = \begin{cases} Q_i^3(x, y, z), & \text{if } Q_i(x, y, z) \geq 0, \\ 0, & \text{if } Q_i(x, y, z) < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $Q(x, y, z)$ – возмущающая квадрака.

На рисунке 4 приведен алгоритм формирования функционально заданных объектов.

Уравнения эластодинамики используются в визуальных вычислениях для моделирования анимации и деформации тел. В предлагаемом методе решаются следующие задачи:

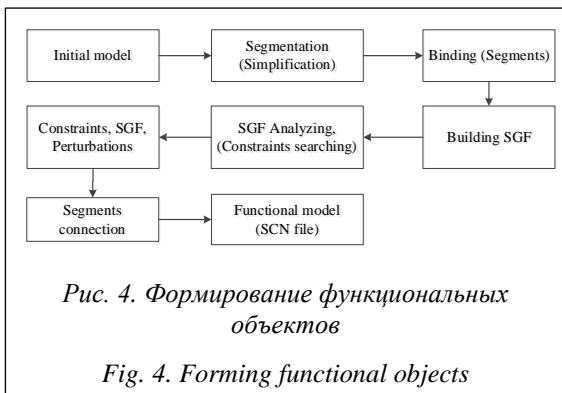
- адаптация уравнений эластодинамики для экспоненциального интегрирования;
- экспоненциальная обработка полного нелинейного оператора воздействия;
- разработка точного экспоненциального метода моделирования, адаптированного к повышенной жесткости;
- разработка точного экспоненциального алгоритма для сложных колебательных систем;
- построение экспоненциального интегратора на базе вычисления экспоненциальной



функции полной матрицы Якоби и оператора воздействия;

- адаптация экспоненциальной интеграции с использованием матричных экспоненциальных функций для моделирования линейных упругих систем;
- оптимизация структуры полной матрицы Якоби и полного оператора нелинейного воздействия;
- использование приближения Крылова к линейным системам второго порядка;
- использование экспоненциальной функции якобиана полного нелинейного оператора воздействия;
- разработка экспоненциального интегратора для общих крупномасштабных нелинейных систем.

Адаптация уравнений эластодинамики для экспоненциального интегрирования. Рассматривается задача эластодинамики для визуальных вычислений, например, такая как моделирование систем из $n/3$ связанных генераторов с n степенями свободы. Каждый генератор имеет вектор положения $\vec{x}_i(t) \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n/3$ в момент времени t .



Система связанных генераторов:

$$f(\vec{x}(t)) = M\vec{w}(t) + M_D\vec{s}(t) + M_S\vec{x}(t), \quad (3)$$

где $\vec{s}_i(t)$ – скорость вектора; $\vec{w}(t)$ – производная скорости; $\vec{x}(t) = (\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_{n/3}(t)) \in \mathbb{R}^n$ – вектор положений; $M, M_D, M_S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симметричная матрица массы, матрица демпфирования и симметричная матрица жесткости; $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ – функция внешних сил.

Поскольку не учитывается затухание $M_D = 0$ и матрица M диагональная, уравнение (3) упрощается: $g(\vec{x}(t)) = \vec{w}(t) + L_S\vec{x}(t), \quad (4)$

где $g(\vec{x}(t)) = M^{-1}f(\vec{x}(t)), L_S = M^{-1}M_S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица симметричная, положительно определенная.

Для жесткой системы необходим интегратор времени в масштабе общего движения объекта с достаточной точностью.

Для улучшения числовых свойств жесткой матрицы, используемой в качестве аргумента экспоненциальной функции, уравнение (4) будет следующим:

$$\vec{S}(t) = F(\vec{X}(t)) + A\vec{X}(t) + G(\vec{X}(t)), \quad (5)$$

где $\vec{X}(t) = (\Psi\vec{x}(t), \vec{s}(t))^T$ – временная переменная; A – кососимметричная матрица; $G(\vec{X}) = (0, g(\vec{x}))^T; \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$.

Экспоненциальная обработка. При дискретизации временной переменной $t_n = t_{n-1} + k_n$ ($n = 1, \dots, T$) на интервале $t \in [t_0, t_{end}]$ запишем уравнение (5) в виде

$$\vec{S}(t) = F(\vec{X}(t_n)) + F'(\vec{X}(t_n))(\vec{X}(t) - \vec{X}(t_n)) + E_n(\vec{X}(t_n)), \quad (6)$$

где $E_n(\vec{X}(t_n)) = F(\vec{X}(t) - \vec{X}(t_n)) - F'(\vec{X}(t_n)) \times (\vec{X}(t) - \vec{X}(t_n))$ – нелинейная функция первого порядка разложения в ряд Тейлора $F(\vec{X}(t))$.

Запишем уравнение (6) в интегральной форме:

$$\vec{X}(t_{n+1}) = \vec{X}(t_n) + k_n \phi_1 \left(k_n J(\vec{X}(t_n)) F(\vec{X}(t_n)) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp((t_{n+1} - t) J \vec{X}(t)) E_n(\vec{X}(t)) dt \right), \quad (7)$$

где $J(\vec{X}(t)) = F'(\vec{X}(t)) = A + G'(\vec{X}(t))$ – матрица Якоби; $\phi_1(z)$ – экспоненциальная аналитическая функция $\phi_1(z) = z^{-1}(\exp(z) - 1)$.

Упростим интегральную форму:

$$\vec{X}(t_{n+1}) = \vec{X}(t_n) + k_n \phi_1 \left(k_n J(\vec{X}(t_n)) F(\vec{X}(t_n)) + k_n \int_0^1 \exp((1 - \vartheta) k_n J \vec{X}(t_n)) E_n(\vec{X}(t_n + \vartheta k_n)) d\vartheta \right), \quad (8)$$

где $t = t_n + \vartheta k_n$.

Экспоненциальное интегрирование строится с помощью квадратуры для нелинейного интеграла в уравнении (8). Для задачи эластодинамики используем трехступенчатый метод EPIRK четвертого порядка [21]. Для этого определяем расширение локальной погрешности за один временной шаг. Это приводит к жестко точному методу, который необходим для экономии вычислительных ресурсов по сравнению с классическими методами.

Жестко точный метод. Для жестких задач матрица Якоби имеет большую норму, поэтому элементарные дифференциалы будут векторами с большой нормой. Следовательно, члены в разложении локальной ошибки могут быть большими.

Локальная ошибка выражается следующим образом:

$$err_n = c_1 (k_n \bar{J}_n) k_n \bar{F}_n + c_3 (k_n \bar{J}_n) k_n^3 \bar{F}_n' (\bar{F}_n, \bar{F}_n) + \dots, \quad (9)$$

где $c_i(k_n \bar{J}_n)$ – коэффициенты, ограниченные функциями $(k_n \bar{J}_n)$.

Для дальнейшего повышения эффективности метода используются дополнительные ограничения, которые базируются на аппроксимации матричных функций векторных произведений. Основные вычисления экспоненциального метода тратятся на вычисления матричных функций. Наиболее общим и эффективным методом, применимым к общим большим матрицам, является адаптивный алгоритм Крылова [17]. Свойства метода позволяют накладывать дополнительные ограничения с условием времени. Адаптивный алгоритм Крылова предназначен для вычисления линейной комбинации векторов. Адаптивный метод EPIRK [21] оптимизирован для использования

преимуществ адаптивного алгоритма Крылова. Описан трехступенчатый точный четвертого порядка метод EPIRK [21].

В предложенном методе используется адаптированная схема с постоянным временным шагом, поскольку схема [21] обеспечивает эффективный способ численного решения задач эластодинамики.

В результате для задачи Коши имеем начальные значения:

$$g(\vec{x}(t)) = \vec{w}(t) + M_D \vec{s}(t) + L_S \vec{x}(t), \quad (10)$$

где $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$; g, L_S приводятся в уравнении (4).

На рисунке 5 показан алгоритм интеграции для задачи Коши.

Вычисления квадратного корня матрицы зависят от размера L (10). При работе с небольшими или средними системами используется декомпозиция. Для большой системы, чтобы избежать явного предварительного вычисления квадратного корня, используется итерационный метод. В данном случае – итерация квадратного корня Ньютона.

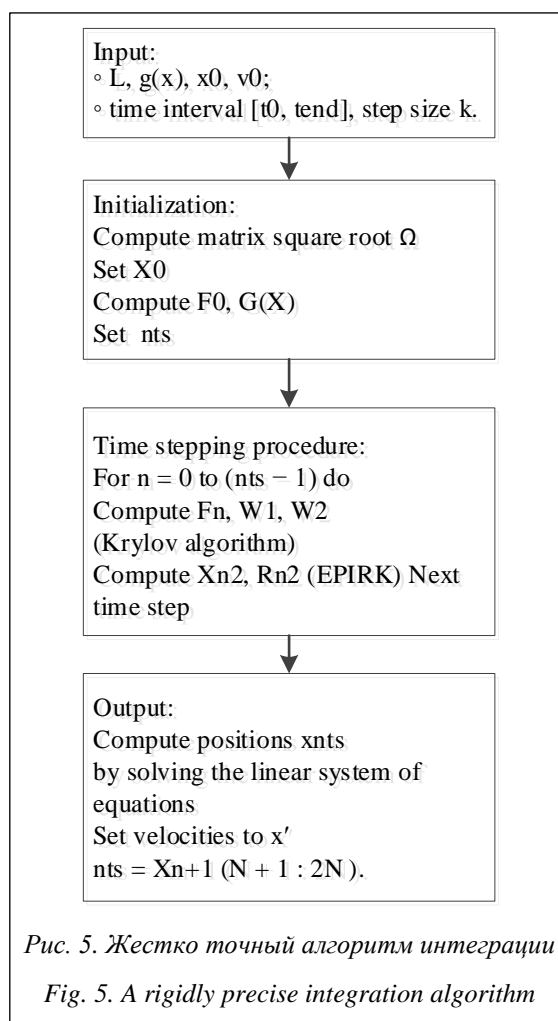


Рис. 5. Жестко точный алгоритм интеграции

Fig. 5. A rigidly precise integration algorithm

Для обработки затухания используется $M_D = M^{-1}M_D$ с матрицами массы и демпфирования (3).

Для нелинейной упругости, описываемой переменной матрицей $L_s \bar{x}(t)$, уравнение (10) преобразуется следующим образом:

$$\bar{g}(\bar{x}(t)) = \ddot{w}(t) + M_D \ddot{s}(t) + L_s(\bar{x}_0, t_0) \bar{x}(t). \quad (11)$$

В итоге учитываются контактные силы и нелинейные упругие силы. Вышеприведенный алгоритм имеет преимущество экспоненциальной обработки нелинейности. Дополнительно обеспечивается стабильность для нелинейных случаев.

Решения

Результаты моделирования упругой деформации показаны на рисунке 6.

В отличие от известных методов время выполнения строго точного интегратора существенно не увеличивается при увеличении жесткости.

Плотно упакованные эластичные волоконные структуры являются каноническими примерами сложных и жестких систем.

Смоделированная динамика эластичного каната с несколькими сотнями отдельных волокон при растяжении показана на рисунке 7.

Хотя такие модели популярны в силу их эффективности, сложно получить физически точные результаты, поскольку реалистичные параметры материала трудно интегрировать, не сталкиваясь с числовыми проблемами. Чтобы избежать взаимопроникновения отдельных волокон, применяются корректирующие импульсы соответствующих величин и используется линейное демпфирование.

В качестве канонических примеров на рисунке 8 приведены сцены деформируемых кроликов, которые состоят из патчей свободных форм.

Для определения точности преобразования сначала вычисляются буферы глубины для двух моделей (функциональной и полигональной) в виде 2D-массива данных. Каждый элемент массива содержит расстояние от камеры до соответствующей точки на поверхности модели.

Затем сравниваются все точки этих буферов, чтобы оценить среднюю разницу в глубине. Таким образом, оценивается среднее отклонение относительно всей модели. Если обе модели полностью совпадают, то отклонения равны нулю.

Результаты оцениваются относительно куба размером $1,0 \times 1,0 \times 1,0$.

Представленный метод сравнивается с классическим и современными методами для жестких систем, то есть с обратной схемой Эйлера и экспоненциального интегратора [18]. Для улучшения сходимости используется схема линейного поиска. Дополнительно применяется диагональная коррекция Гесса в случае неопределенных матриц. Это положительная характеристика предлагаемого метода.

Производительность классических методов сильно зависит от числовой жесткости базовой

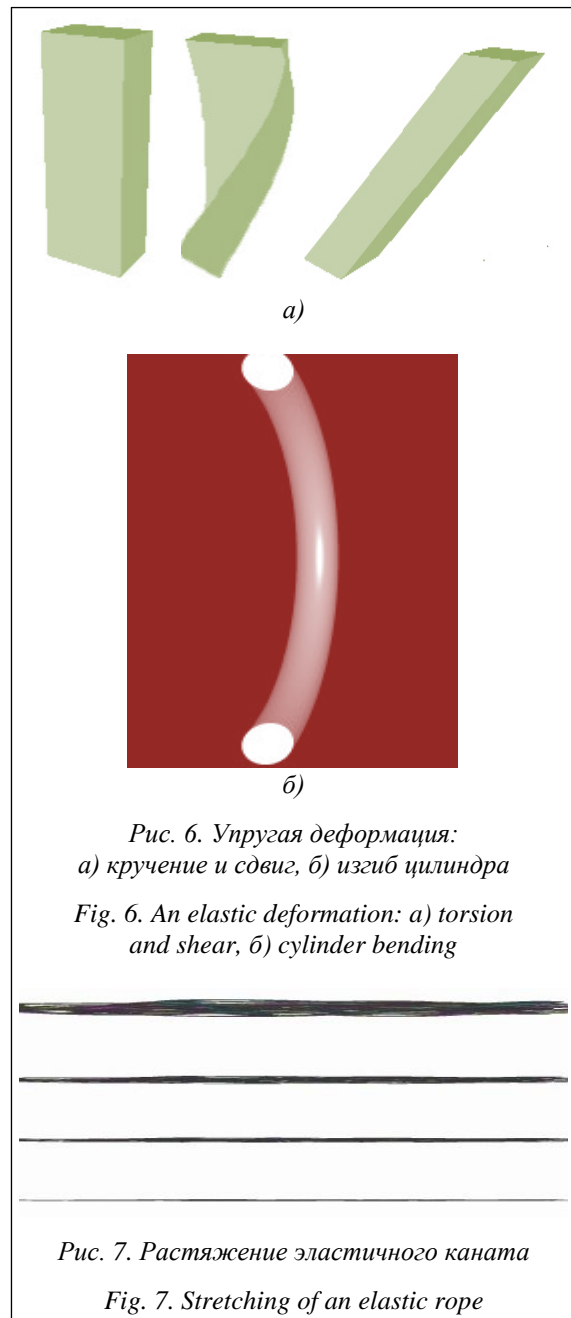


Рис. 6. Упругая деформация: а) кручение и сдвиг, б) изгиб цилиндра

Fig. 6. An elastic deformation: a) torsion and shear, б) cylinder bending



Рис. 7. Растяжение эластичного каната

Fig. 7. Stretching of an elastic rope

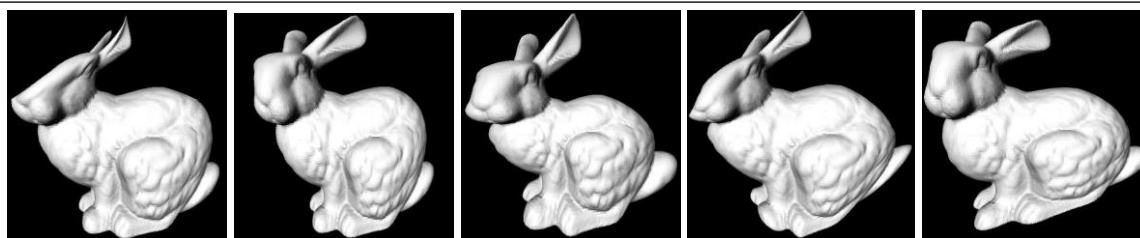


Рис. 8. Деформация функциональных кроликов

Fig. 8. Deformation of functional rabbits

системы, что часто приводит к нереалистичному поведению или значительной потере эффективности [22]. В отличие от методов типа Гаутски, где линейные силы пружины развиваются с использованием тригонометрических функций линейной части Якобиана, предложенный метод интеграции, базирующийся на математической основе дифференциальных уравнений, разработан для преодоления ограничений классических методов. Экспоненциальная обработка полного нелинейного оператора воздействия силы на объект отличается от классических неявных и экспоненциальных подходов [23, 24]. Использование жесткой точности гарантирует, что эффективность моделирования значительно менее чувствительна к повышенной жесткости. Как следствие, можно значительно ускорить моделирование жестких систем по сравнению с классическими интеграторами и значительно повысить общую точность.

Результаты экспериментов при количестве степеней свободы 24 К показаны на рисунке 9 и в таблице. В частности, диаграмма точности (рис. 9) показывает лучшую производительность метода по сравнению с классическим точным двухступенчатым экспоненциальным интегратором [23] и экспоненциальным интегратором типа Гаутски [24] для моделирования деформируемых кроликов (рис. 8). В то время как производительность классического экспоненциального интегратора [23] и интегратора типа Гаутски сильно снижается при увеличении жесткости, представленный метод практически невосприимчив и не показывает значительного снижения его производительности. Это приводит к резкому ускорению, особенно для больших жесткостей, как показано в таблице ($r0$, $r1$), в которой отражено время вычислений для моделирования деформируемых кроликов с различной жесткостью и максимально допустимой относительной ошибкой $L2$ (10 %) в пространстве положения и скорости.

Результаты экспериментов

Experimental results

Метод	Кролик (r0)	Кролик (r1)
Классический экспоненциальный интегратор	276 сек.	378 сек.
Экспоненциальный интегратор типа Гаутски	520 сек.	950 сек.
Авторский метод на CPU	1.2 сек.	1.24 сек.

При тестировании метода время вычисления на CPU составило 1.2 сек., на GPU – 20 мсек., количество кадров в сек. на CPU – 0.8, на GPU – 49. Таким образом, вычисления на GPU выполняются быстрее, чем на CPU.

Тестирование производилось на компьютере с процессором Intel Core i5-2500K и графическим процессором GeForce GTX 970. Для визуализации использовался метод, описанный в работе [25].

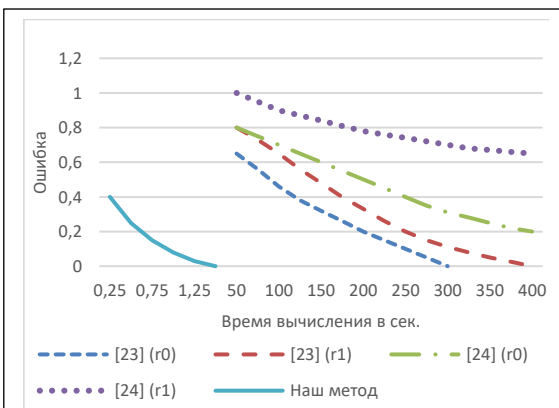


Рис. 9. Диаграмма точности для иллюстрации относительной погрешности $L2$ в пространстве положения и скорости

Fig. 9. An accuracy diagram to illustrate relative $L2$ error in position space and velocity

Заключение

В данной статье представлен метод моделирования деформации эластичных объектов с использованием функций возмущения. Разработан жестко точный подход для решения задач эластодинамики. Используются дифференциальные уравнения второго порядка. Метод базируется на дифференциальных уравнениях и экспоненциальной обработке полного нелинейного оператора воздействия с использованием жесткой точности и требует вычисления матричных функций. Это реализуется за счет использования адаптивных проекций подпространства Крылова. По сравнению с извест-

ными подходами метод имеет преимущества с точки зрения как точности, так и времени вычислений.

В работе приведены примеры деформации объектов, растяжения эластичных тел и т.д. Метод легко распараллеливается, что позволяет использовать возможности ускорения вычислений графических процессоров. Производительность известных методов сильно зависит от численной жесткости базовых систем, предлагаемый метод более надежен в отношении увеличения жесткости. Высокая точность и скорость, а также надежность при увеличении жесткости являются особенностями метода.

Литература

1. Michels D.L., Paul J., Mueller T., Sobottka G.A. A Physically based approach to the accurate simulation of stiff fibers and stiff fiber meshes. *Computers and Graphics*, 2015, vol. 53, part B, pp. 136–146. DOI: 10.1016/j.cag.2015.10.001.
2. Layton W.J., Pei W., Qin Y., Trenchea C. Analysis of the variable step method of Dahlquist, Liniger and Nevanlinna for fluid flow. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2021, vol. 38, no. 6, pp. 1713–1737. DOI: 10.1002/num.22831.
3. Tangherloni A., Nobile M.S., Cazzaniga P., Capitoli G. FiCoS: A fine-grained and coarse-grained GPU-powered deterministic simulator for biochemical networks. *PLoS Computational Biology*, 2021, vol. 17, no. 9, art. e1009410. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1009410.
4. Guihal J.-M., Auger F., Bernard N., Schaeffer E. Efficient implementation of continuous-discrete extended Kalman filters for state and parameter estimation of nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2021, vol. 18, no. 5, pp. 3077–3085. DOI: 10.1109/TII.2021.3109095.
5. Vabishchevich P. Two-level schemes for the advection equation. *J. of Computational Physics*, 2017, vol. 363, pp. 158–177. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.02.044.
6. Vabishchevich P. Three-Level schemes for the advection equation. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 7, pp. 905–914. DOI: 10.1134/S0012266119070048.
7. Oghonyon J.G., Ogunniyi P., Ogbu I.F. A computational strategy of variable step, variable order for solving stiff systems of ordinary differential equations. *Int. J. of Analysis and Applications*, 2021, vol. 19, no. 6, pp. 929–948. DOI: 10.28924/2291-8639-19-2021-929.
8. Macklin M., Muller M. A Constraint-based formulation of stable neo-hookean materials. *Proc. MIG*, 2021, art. 12, pp. 1–7. DOI: 10.1145/3487983.3488289.
9. Lan L., Luo R., Fratarcangeli M., Xu W. Medial elastics: Efficient and collision-ready deformation via medial axis transform. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, vol. 39, no. 3, pp. 1–17. DOI: 10.1145/3384515.
10. Leimer K., Musialski P. Analysis of a reduced-order model for the simulation of elastic geometric zig-zag-spring meta-materials. *Computers and Graphics*, 2021, vol. 102, pp. 187–198. DOI: 10.1016/j.cag.2021.10.007.
11. Sperl G., Narain R., Wojtan C. Mechanics-aware deformation of yarn pattern geometry. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, vol. 40, no. 4, pp. 1–11. DOI: 10.1145/3450626.3459816.
12. Brunel C., Benard P., Guennebaud G. A time-independent deformer for elastic contacts. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, vol. 40, no. 4, pp. 1–14. DOI: 10.1145/3450626.3459879.
13. Kee M.H., Um K., Jeong W., Han J. Constrained projective dynamics: Real-time simulation of deformable objects with energy-momentum conservation. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, vol. 40, no. 4, pp. 1–12. DOI: 10.1145/3450626.3459878.
14. Luo R., Xu W., Shao T., Xu H. Accelerated complex-step finite difference for expedient deformable simulation. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, vol. 38, no. 6, pp. 1–16. DOI: 10.1145/3355089.3356493.
15. Schulz L., Inci B., Pech M., Schulz D. Subdomain-based exponential integrators for quantum Liouville-type equations. *J. of Computational Electronics*, 2021, vol. 20, no. 6, pp. 2070–2090. DOI: 10.1007/s10825-021-01797-2.

16. Luan V.T., Michels D.L. Efficient exponential time integration for simulating nonlinear coupled oscillators. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 2021, vol. 391, no. 4, art. 113429. DOI: 10.1016/j.cam.2021.113429.
17. Gaudreault S., Rainwater G., Tokman M. KIOPS: A fast adaptive Krylov subspace solver for exponential integrators. *J. of Computational Physics*, 2018, vol. 372, pp. 236–255. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.06.026.
18. Schulz L., Schulz D. Formulation of a phase space exponential operator for the Wigner transport equation accounting for the spatial variation of the effective mass. *J. of Computational Electronics*, 2020, vol. 19, no. 4, pp. 1399–1415. DOI: 10.1007/s10825-020-01551-0.
19. Вяткин С.И., Долговесов Б.С. Физически корректная визуализация функционально заданных объектов // *Автометрия*. 2022. Т. 58. № 3. С. 98–105. DOI: 10.15372/AUT20220311.
20. Vyatkin S., Romanyuk A., Romanyuk O., Nechyporuk M., Chekhmestruk R., Mykhaylov P. Optimized finite element method using free-form volume patches for deformation of three-dimensional objects. *Proc. X Int. Conf. ACIT*, 2020, pp. 845–850. DOI: 10.1109/ACIT49673.2020.9208817.
21. Narayanamurthi M., Tranquilli P., Sandu A., Tokman M. EPIRK-W and EPIRK-K time discretization methods. *J. of Scientific Computing*, 2019, vol. 78, no. 1, pp. 167–201. DOI: 10.1007/s10915-018-0761-3.
22. Michels D.L., Desbrun M. A Semi-analytical approach to molecular dynamics. *J. of Computational Physics*, 2015, vol. 303, pp. 336–354. DOI: 10.1016/j.jcp.2015.10.009.
23. Luan V.T. Fourth-order two-stage explicit exponential integrators for time-dependent PDEs. *Applied Numerical Mathematics*, 2017, vol. 112, pp. 91–103. DOI: 10.1016/j.apnum.2016.10.008.
24. Michels D.L., Sobottka G.A., Weber A.G. Exponential integrators for stiff elastodynamic problems. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, vol. 33, no. 1, art. 7, pp. 1–20.
25. Вяткин С.И. Метод рекурсивного поиска элементов изображения функционально заданных поверхностей // *Автометрия*. 2017. Т. 53. № 3. С. 53–57. DOI: 10.15372/AUT20170307.

Software & Systems
DOI: 10.15827/0236-235X.140.748-757

Received 06.06.22, Revised 29.08.22
2022, vol. 35, no. 4, pp. 748–757

Modelling of deformation of elastic objects using perturbation functions

*S.I. Vyatkin*¹, Ph.D. (Engineering), Senior Researcher, *sivser@mail.ru*

*B.S. Dolgovesov*¹, Ph.D. (Engineering), Head of the Laboratory, *bsd@iae.nsk.su*

¹ *Institute of Automation and Electrometry, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Synthesizing Visualization Systems Laboratory, Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

Abstract. The paper presents a method for modelling the deformation of elastic objects using perturbation functions. It describes deformations of elastic materials capable of stretching in such a way as to return to their original shape and size when releasing force. The method uses second-order differential equations and operator functions in exponential integration. As a result, the calculation time decreases and the overall accuracy increases. The method is easily parallelized and allows visualizing complex realistic models. Due to parallel processing and the absence of the need to transfer a large amount of data from the shared memory to the GPU memory, the visualization speed increases compared to the option that uses CPU only.

The second paragraph considers a way of defining objects that is different from the polygonal description. A basic shape and a set of perturbations are used to define an object. This approach allows reducing memory costs and improving image quality.

The third paragraph lists the tasks that solved when modelling animation and deforming bodies using the elastodynamics equations. The paper describes the adaptation of the elastodynamics equations for exponential integration. Exponential methods are well suited for rigid systems when solving complex problems. For a rigid system, the authors use a time integrator on the scale of the object general movement with sufficient accuracy.

There is a description of the exponential processing when sampling a time variable over a certain interval. Exponential integration is constructed using quadrature for a nonlinear integral, which leads to a rigidly accurate method necessary to save computational resources compared to classical methods. The authors propose a rigidly accurate method using an adapted scheme with a constant time step. For large systems, they use Newton's square root iteration in order to avoid explicit precomputation of the square root.

The fourth paragraph gives the results of testing the method and the comparison with classical and modern approaches for rigid systems. To determine the accuracy of specifying functionally specified objects, the depth buffer of the models (functional and polygonal) is calculated and points are compared to estimate the average difference in depth. Thus, the average deviation relative to the entire model is estimated. In conclusion, the authors briefly summarize the results and describe the approaches used in the work.

Keywords: perturbation functions, modelling of elastic objects, differential equations, deformation of elastic materials, exponential integration.

References

1. Michels D.L., Paul J., Mueller T., Sobottka G.A. A Physically based approach to the accurate simulation of stiff fibers and stiff fiber meshes. *Computers and Graphics*, 2015, vol. 53, part B, pp. 136–146. DOI: 10.1016/j.cag.2015.10.001.
2. Layton W.J., Pei W., Qin Y., Trenchea C. Analysis of the variable step method of Dahlquist, Liniger and Nevanlinna for fluid flow. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2021, vol. 38, no. 6, pp. 1713–1737. DOI: 10.1002/num.22831.
3. Tangherloni A., Nobile M.S., Cazzaniga P., Capitoli G. FiCoS: A fine-grained and coarse-grained GPU-powered deterministic simulator for biochemical networks. *PLoS Computational Biology*, 2021, vol. 17, no. 9, art. e1009410. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1009410.
4. Guihal J.-M., Auger F., Bernard N., Schaeffer E. Efficient implementation of continuous-discrete extended Kalman filters for state and parameter estimation of nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2021, vol. 18, no. 5, pp. 3077–3085. DOI: 10.1109/TII.2021.3109095.
5. Vabishchevich P. Two-level schemes for the advection equation. *J. of Computational Physics*, 2017, vol. 363, pp. 158–177. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.02.044.
6. Vabishchevich P. Three-Level schemes for the advection equation. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 7, pp. 905–914. DOI: 10.1134/S0012266119070048.
7. Oghonyon J.G., Ogunniyi P., Ogbu I.F. A computational strategy of variable step, variable order for solving stiff systems of ordinary differential equations. *Int. J. of Analysis and Applications*, 2021, vol. 19, no. 6, pp. 929–948. DOI: 10.28924/2291-8639-19-2021-929.
8. Macklin M., Muller M. A Constraint-based formulation of stable neo-hookean materials. *Proc. MIG*, 2021, art. 12, pp. 1–7. DOI: 10.1145/3487983.3488289.
9. Lan L., Luo R., Fratarcangeli M., Xu W. Medial elastics: Efficient and collision-ready deformation via medial axis transform. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, vol. 39, no. 3, pp. 1–17. DOI: 10.1145/3384515.
10. Leimer K., Musialski P. Analysis of a reduced-order model for the simulation of elastic geometric zig-zag-spring meta-materials. *Computers and Graphics*, 2021, vol. 102, pp. 187–198. DOI: 10.1016/j.cag.2021.10.007.
11. Sperl G., Narain R., Wojtan C. Mechanics-aware deformation of yarn pattern geometry. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, vol. 40, no. 4, pp. 1–11. DOI: 10.1145/3450626.3459816.
12. Brunel C., Benard P., Guennebaud G. A time-independent deformer for elastic contacts. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, vol. 40, no. 4, pp. 1–14. DOI: 10.1145/3450626.3459879.
13. Kee M.H., Um K., Jeong W., Han J. Constrained projective dynamics: Real-time simulation of deformable objects with energy-momentum conservation. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, vol. 40, no. 4, pp. 1–12. DOI: 10.1145/3450626.3459878.
14. Luo R., Xu W., Shao T., Xu H. Accelerated complex-step finite difference for expedient deformable simulation. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, vol. 38, no. 6, pp. 1–16. DOI: 10.1145/3355089.3356493.
15. Schulz L., Inci B., Pech M., Schulz D. Subdomain-based exponential integrators for quantum Liouville-type equations. *J. of Computational Electronics*, 2021, vol. 20, no. 6, pp. 2070–2090. DOI: 10.1007/s10825-021-01797-2.
16. Luan V.T., Michels D.L. Efficient exponential time integration for simulating nonlinear coupled oscillators. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 2021, vol. 391, no. 4, art. 113429. DOI: 10.1016/j.cam.2021.113429.
17. Gaudreault S., Rainwater G., Tokman M. KIOPS: A fast adaptive Krylov subspace solver for exponential integrators. *J. of Computational Physics*, 2018, vol. 372, pp. 236–255. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.06.026.
18. Schulz L., Schulz D. Formulation of a phase space exponential operator for the Wigner transport equation accounting for the spatial variation of the effective mass. *J. of Computational Electronics*, 2020, vol. 19, no. 4, pp. 1399–1415. DOI: 10.1007/s10825-020-01551-0.
19. Vyatkin S.I., Dolgovesov B.S. Physically correct visualization of functionally defined objects. *Avtometriya*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 98–105. DOI: 10.15372/AUT20220311 (in Russ.).

20. Vyatkin S., Romanyuk A., Romanyuk O., Nechyporuk M., Chekhmestruk R., Mykhaylov P. Optimized finite element method using free-form volume patches for deformation of three-dimensional objects. *Proc. X Int. Conf. ACIT*, 2020, pp. 845–850. DOI: 10.1109/ACIT49673.2020.9208817.
21. Narayanamurthi M., Tranquilli P., Sandu A., Tokman M. EPIRK-W and EPIRK-K time discretization methods. *J. of Scientific Computing*, 2019, vol. 78, no. 1, pp. 167–201. DOI: 10.1007/s10915-018-0761-3.
22. Michels D.L., Desbrun M. A Semi-analytical approach to molecular dynamics. *J. of Computational Physics*, 2015, vol. 303, pp. 336–354. DOI: 10.1016/j.jcp.2015.10.009.
23. Luan V.T. Fourth-order two-stage explicit exponential integrators for time-dependent PDEs. *Applied Numerical Mathematics*, 2017, vol. 112, pp. 91–103. DOI: 10.1016/j.apnum.2016.10.008.
24. Michels D.L., Sobottka G.A., Weber A.G. Exponential integrators for stiff elastodynamic problems. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, vol. 33, no. 1, art. 7, pp. 1–20.
25. Vyatkin S.I. Recurring search method for the image elements of functionally set surfaces. *Avtometriya*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 53–57. DOI: 10.15372/AUT20170307 (in Russ.).

Для цитирования

Вяткин С.И., Долговесов Б.С. Моделирование деформации эластичных объектов с использованием функций возмущения // Программные продукты и системы. 2022. Т. 35. № 4. С. 748–757. DOI: 10.15827/0236-235X.140.748-757.

For citation

Vyatkin S.I., Dolgovesov B.S. Modelling of deformation of elastic objects using perturbation functions. *Software & Systems*, 2022, vol. 35, no. 4, pp. 748–757 (in Russ.). DOI: 10.15827/0236-235X.140.748-757.