

УДК 517.958  
DOI: 10.15827/0236-235X.139.316-328

Дата подачи статьи: 01.08.22, после доработки: 08.08.22  
2022. Т. 35. № 3. С. 316–328

## **Истинные и фиктивные собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера**

*И.В. Кетов*<sup>1</sup>, магистрант, *ivlketov@gmail.com*

*А.О. Октябрьская*<sup>2</sup>, аспирант, *alina.oktyabrskaya.21@gmail.com*

*А.О. Спиридонов*<sup>3</sup>, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, *aospiridonov@gmail.com*

*Е.М. Карчевский*<sup>3</sup>, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, главный научный сотрудник, *ekarchev70@gmail.com*

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

<sup>2</sup> Государственный университет штата Луизиана, г. Батон-Руж, LA 70803, США

<sup>3</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, НИИ «Высокопроизводительные вычисления, медицинская кибернетика и машинное зрение» (Институт вычислительной математики и информационных технологий), г. Казань, 420008, Россия

Теоретически и численно исследован спектр нелинейной задачи на собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера. В общем случае собственные значения этой задачи распадаются на два множества – множество истинных собственных значений, соответствующих исходной задаче на собственные значения оператора Гельмгольца, и множество фиктивных собственных значений, которые соответствуют так называемой вывернутой наизнанку задаче. Поэтому важно определить условия, при которых исходная задача на собственные значения оператора Гельмгольца на плоскости и соответствующая задача для интегрального оператора будут спектрально эквивалентны.

Исходная задача на собственные значения оператора Гельмгольца сведена к нелинейной задаче на собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера. Решения исходной задачи и задачи, вывернутой наизнанку, найдены методом разделения переменных. Решение системы граничных интегральных уравнений Мюллера построено методом Галеркина.

Сформулирована и доказана теорема эквивалентности для исходной задачи на собственные значения оператора Гельмгольца и системы граничных интегральных уравнений Мюллера. Численно проверено, что спектр нелинейной задачи на собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера, помимо истинных собственных значений, содержит фиктивные. Определен диапазон, который состоит только из фиктивных собственных значений, и показано, что эти фиктивные собственные значения явно отделены от истинных собственных значений.

Доказанная теорема эквивалентности дает теоретическое обоснование применимости метода граничных интегральных уравнений Мюллера. Разработанные компьютерные программы могут быть непосредственно использованы при моделировании микродисковых лазеров.

**Ключевые слова:** задача на собственные значения, система граничных интегральных уравнений Мюллера, микродисковый лазер, активная область, спектральная эквивалентность.

Микроволновые лазеры на основе двумерных материалов чрезвычайно интересны благодаря своим малым размерам и низким порогам [1]. Численное моделирование таких микрорезонаторов основано на решении задачи на собственные значения оператора Гельмгольца на плоскости. В классическом подходе частоты рассматриваются как комплекснозначные собственные значения (Complex-Frequency Eigenvalue Problem, CFEP). Однако этот подход имеет ряд недостатков и не учитывает некото-

рые важные особенности модели (рассматриваются только пассивные микрорезонаторы). Наряду с CFEP известна формулировка, первоначально предложенная в [2], в которой предполагается, что собственные числа являются вещественными, а микрорезонатор считается активным (Lasing Eigenvalue Problem, LEP). В настоящей работе с целью использования одной теоретической основы для обеих моделей LEP и CFEP рассмотрена модель, называемая обобщенной задачей на собственные значения

относительно комплексной частоты (Generalized Complex-Frequency Eigenvalue Problem, GCFEP) [3].

Для решения GCFEP двумерная задача для уравнения Гельмгольца сведена к нелинейной задаче на собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера [4]. В общем случае собственные значения этой задачи распадаются на два множества – множество истинных собственных значений, соответствующих GCFEP, и множество фиктивных собственных значений, соответствующих так называемой вывернутой наизнанку задаче [5]. Система граничных интегральных уравнений Мюллера имеет фиктивные собственные значения, поскольку показатель преломления в активной области в формулировке GCFEP – комплексное число. Если электромагнитные характеристики в каждой области являются вещественными, то задача, вывернутая наизнанку, имеет только тривиальное решение, и система Мюллера не имеет фиктивных собственных значений [5]. Первоначально Мюллер предложил использовать систему в этом конкретном случае. Тогда система уравнений Мюллера не имеет ни одного вещественного собственного значения. Все собственные значения комплекснозначные [6]. Более того, эта система является системой Фредгольма [7]. Следовательно, она хорошо подходит для решения задачи рассеяния с вещественнозначной частотой в пассивном электромагнитном поле.

Фиктивные собственные значения рассмотрены в [8] при решении внешней задачи Неймана для уравнения Гельмгольца. В [6] предложены различные модификации интегральных уравнений, которые позволяют избежать случайного вычисления фиктивных собственных значений.

В настоящей работе рассмотрен спектр нелинейной задачи на собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера, порожденной GCFEP. Получено условие, при котором исходная GCFEP и система граничных интегральных уравнений Мюллера эквивалентны. Численно подтверждено, что задача на собственные значения системы Мюллера содержит фиктивные решения. При этом наборы истинных и фиктивных собственных значений явно отделяются друг от друга.

**Обобщенная задача на собственные значения относительно комплексной частоты**

Предположим, что граница  $\Gamma$  является дважды непрерывно дифференцируемой кривой, и

введем внешний нормальный единичный вектор  $n$  к этой границе (рис. 1). Обозначим через  $U$  пространство всех комплекснозначных функций, непрерывных на  $\bar{\Omega}_i, \bar{\Omega}_e$  и дважды непрерывно дифференцируемых на  $\Omega_i, \Omega_e$ . Пусть  $\mathbb{L}$  – поверхность Римана функции  $\ln k$ . Для любого заданного значения параметра  $\gamma \in \mathbb{R}$  ненулевую функцию  $u \in U$  будем называть собственной функцией GCFEP, соответствующей собственному значению  $k \in \mathbb{L}$ , если выполняются

– уравнения Гельмгольца  $\Delta u + k_i^2 u = 0, x \in \Omega_i,$  (1)

$\Delta u + k_e^2 u = 0, x \in \Omega_e,$  (2)

– граничные условия  $u^- = u^+, \eta_i \frac{\partial u^-}{\partial n} = \eta_e \frac{\partial u^+}{\partial n}, x \in \Gamma,$  (3)

– условие излучения Рейхардта [3, 9]  $u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(k_e r) \exp(il\varphi), r \geq R_0.$  (4)

Здесь  $k_j = kv_j, u = H_z, \eta_j = v_j^{-2}$  в случае Н-поляризации и  $u = E_z, \eta_j = 1$  в случае Е-поляризации,  $j = i, e; H_l^{(1)}(z)$  – функция Ханкеля первого рода порядка  $l; r$  и  $\varphi$  – полярные координаты точки  $x; u^-(u^+)$  – предельное значение функции изнутри (извне) контура  $\Gamma$ .

Следуя [10], предположим, что предельные значения нормальной производной на границе существуют в том смысле, что пределы

$\frac{\partial u^\pm}{\partial n}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} (n(x), \text{gradu}(x \pm hn(x))), x \in \Gamma,$  (5)

существуют равномерно на  $\Gamma$ . Заметим, что для любого решения  $u$  уравнения (1) в  $\Omega_e$  ряд (4)

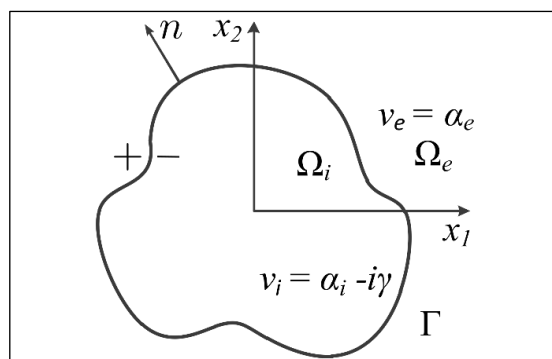


Рис. 1. Геометрия равномерно активного двумерного диэлектрического резонатора произвольной формы исходной GCFEP

Fig. 1. The geometry of a uniformly active 2D dielectric resonator of an arbitrary shape of the original GCFEP

сходится равномерно и абсолютно в любой замкнутой области  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  – произвольные числа, такие что  $R_0 < a < b < \infty$ ; и этот ряд бесконечно дифференцируем по частям [3].

**Обобщенная задача на собственные значения относительно комплексной частоты, вывернутая наизнанку**

Предположим, что показатель преломления в ограниченной области  $\Omega_i$  есть  $v_e = \alpha_e$ , а показатель преломления в неограниченной области  $\Omega_e$  есть  $v_i = \alpha_i - i\gamma$  (рис. 2). Для любого заданного значения параметра  $\gamma \in \mathbb{R}$  ненулевую функцию  $v \in U$  будем называть собственной функцией GCFEP, вывернутой наизнанку в случае Е-поляризации, соответствующей собственному значению  $k \in \mathbb{L}$ , если выполняются соотношения

$$\Delta v + k_e^2 v = 0, x \in \Omega_i, \tag{6}$$

$$\Delta v + k_i^2 v = 0, x \in \Omega_e, \tag{7}$$

$$v^- = v^+, \frac{\partial v^-}{\partial n} = -\frac{\partial v^+}{\partial n}, x \in \Gamma, \tag{8}$$

$$v = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(k_l r) \exp(il\varphi), r \geq R_0. \tag{9}$$

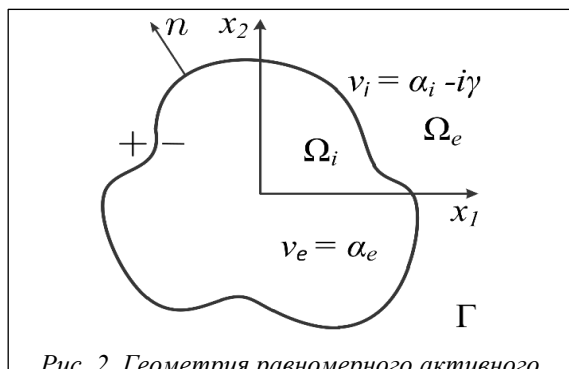


Рис. 2. Геометрия равномерного активного двумерного диэлектрического резонатора произвольной формы GCFEP, вывернутой наизнанку

Fig. 2. The geometry of a uniformly active 2D dielectric resonator of an arbitrary shape of the GCFEP turned inside out

**Система граничных интегральных уравнений Мюллера**

В [11] доказано, что если  $u$  является собственной функцией задачи (1)–(4), соответствующей собственному значению  $k \in \mathbb{L}$  при произвольном значении параметра  $\gamma \in \mathbb{R}$ , то

справедливы следующие интегральные представления [10]:

$$\int_{\Gamma} \left( u^-(y) \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial n} \Phi_i(x, y) \right) dl(y) = \begin{cases} -u(x), & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega_e, \end{cases} \tag{10}$$

$$\int_{\Gamma} \left( u^+(y) \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u^+(y)}{\partial n} \Phi_e(x, y) \right) dl(y) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_i, \\ u(x), & x \in \Omega_e, \end{cases} \tag{11}$$

где  $\Phi_m(x, y) = (i/4)H_0^{(1)}(k_m |x - y|)$ ,  $m = i, e$ . Перейдем к пределу в (10) и используем известное свойство потенциалов двойного слоя и непрерывность потенциалов простого слоя, получим

$$u^-(x) = -\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} u^-(y) dl(y) + \frac{1}{2} u^-(x) + \int_{\Gamma} \Phi_i(x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial n} dl(y), x \in \Gamma. \tag{12}$$

Аналогичным образом из (11) получим, что

$$u^+(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} u^+(y) dl(y) + \frac{1}{2} u^+(x) - \int_{\Gamma} \Phi_e(x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial n} dl(y), x \in \Gamma. \tag{13}$$

Используя условия на границе (3), определим функции

$$\varphi = u^+ = u^-, \psi = \frac{\eta_e + \eta_i}{2\eta_i} \frac{\partial u^+}{\partial n} = \frac{\eta_e + \eta_i}{2\eta_e} \frac{\partial u^-}{\partial n}, x \in \Gamma. \tag{14}$$

Почленно сложим (12), (13) и, используя (14), получим

$$\varphi(x) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} \right) \varphi(y) dl(y) + \int_{\Gamma} \left( \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \Phi_e(x, y) - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \Phi_i(x, y) \right) \psi(y) dl(y) = 0, \tag{15}$$

$x \in \Gamma$ . Вычислив нормальные производные в (10) и (11), перейдя к пределу  $x \rightarrow \Gamma$ , используя определения (14) и хорошо известные свойства потенциалов [10], получим

$$\psi(x) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} - \frac{\partial^2 \Phi_e(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} \right) \varphi(y) dl(y) + \int_{\Gamma} \left( \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(x)} - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(x)} \right) \psi(y) dl(y) = 0, \tag{16}$$

$x \in \Gamma$ . Набор интегральных уравнений (15), (16) называется системой граничных интегральных

уравнений Мюллера (Muller BIEs) [4]. Запишем систему в более удобной форме:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) + \int_{\Gamma} K_{1,1}(x, y)\varphi(y)dl(y) + \\ &+ \int_{\Gamma} K_{1,2}(x, y)\psi(y)dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma, \\ &\psi(x) + \int_{\Gamma} K_{2,1}(x, y)\varphi(y)dl(y) + \\ &+ \int_{\Gamma} K_{2,2}(x, y)\psi(y)dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

где ядра интегральных уравнений определяются как

$$K_{1,1}(x, y) = \frac{\partial\Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial\Phi_e(x, y)}{\partial n(y)}, \quad x, y \in \Gamma, \quad (17)$$

$$K_{1,2}(x, y) = \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i}\Phi_e(x, y) - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i}\Phi_i(x, y), \quad (18)$$

$x, y \in \Gamma,$

$$K_{2,1}(x, y) = \frac{\partial^2\Phi_i(x, y)}{\partial n(x)\partial n(y)} - \frac{\partial^2\Phi_e(x, y)}{\partial n(x)\partial n(y)}, \quad x, y \in \Gamma, \quad (19)$$

$$K_{2,2}(x, y) = \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial\Phi_e(x, y)}{\partial n(x)} - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial\Phi_i(x, y)}{\partial n(x)}, \quad (20)$$

$x, y \in \Gamma.$

В [12] доказано, что ядро (17) непрерывно, (18) непрерывно при  $\eta_i = \eta_j$  и имеет слабую особенность при  $\eta_i \neq \eta_j$ , ядро (19) имеет слабую особенность, ядро (20) непрерывно.

### Эквивалентность

*Теорема.* Пусть дано значение параметра  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Если  $u \in U$  – собственная функция задачи (1)–(4), соответствующая собственному значению  $k \in \mathbb{L}$ , тогда определенные в (14) функции  $\varphi$  и  $\psi$  принадлежат банахову пространству  $C(\Gamma)$  непрерывных на  $\Gamma$  функций и являются нетривиальным решением  $(\varphi, \psi)$  системы (15), (16) с тем же значением  $k$ .

2. Пусть для данного значения  $k \in \mathbb{L}$  система граничных интегральных уравнений Мюллера (15), (16) имеет нетривиальное решение  $(\varphi, \psi) \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  и GCFEP, вывернутая наизнанку, (6)–(9), имеет только тривиальное решение, тогда функция  $u$ , определенная как

$$u(x) = -\int_{\Gamma} \left( \varphi(y) \frac{\partial\Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \psi(y) \Phi_i(x, y) \right) dl(y), \quad (21)$$

$x \in \Omega_i,$

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left( \varphi(y) \frac{\partial\Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \psi(y) \Phi_e(x, y) \right) dl(y), \quad (22)$$

$x \in \Omega_e,$

является собственной функцией исходной GCFEP (1)–(4).

*Доказательство.* Докажем первое утверждение теоремы. Каждая собственная функция (1)–(4) непрерывна на  $\overline{\Omega_i}$  и  $\overline{\Omega_e}$ , следовательно,  $u^+$  и  $u^-$  принадлежат  $C(\Gamma)$ . Значит, функции  $\partial u^+/\partial n$  и  $\partial u^-/\partial n$ , определенные в (5), принадлежат  $C(\Gamma)$  как равномерные пределы непрерывных функций. Очевидно, что определенный в (14) вектор  $(\varphi, \psi)$  – решение (15), (16) по построению этой системы уравнений. Предположим, что  $\varphi = \psi = 0$ , тогда, используя (10), (11) и (14), получим  $u = 0, x \in \mathbb{R}^2$ , что противоречит предположению, что  $u$  – собственная функция задачи (1)–(4).

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть вектор  $(\varphi, \psi) \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$  является решением (15), (16), соответствующим значению параметра  $\gamma \in \mathbb{R}$  и собственному значению  $k \in \mathbb{L}$ . Определим функцию

$$v(x) = -\int_{\Gamma} \left( \varphi(y) \frac{\partial\Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \psi(y) \Phi_e(x, y) \right) dl(y), \quad (23)$$

$x \in \Omega_i,$

$$v(x) = -\int_{\Gamma} \left( \varphi(y) \frac{\partial\Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \psi(y) \Phi_i(x, y) \right) dl(y), \quad (24)$$

$x \in \Omega_e.$

Докажем, что функция  $v$  удовлетворяет всем условиям (6)–(9) GCFEP, вывернутой наизнанку. Во-первых, отметим, что функция  $v$  дважды непрерывно дифференцируема на  $\Omega_i, \Omega_e$  и удовлетворяет (6), (7) как линейная комбинация потенциалов простого и двойного слоев с непрерывными плотностями [10]. Во-вторых, эта линейная комбинация непрерывна на  $\overline{\Omega_i}$  и  $\overline{\Omega_e}$ . Пределы (5) существуют равномерно на  $\Gamma$ . Используя теорему сложения Графа [13], видим, что функция  $\Phi_i$  удовлетворяет (9). Тогда из (24) следует, что функция  $v$  удовлетворяет условию излучения Рейхардта (9).

Граничные условия (8) также выполняются. Проверим первое условие. Перейдем к пределу в (23), (24) при  $x \rightarrow \Gamma$  и используем свойства потенциалов двойного слоя и непрерывность потенциалов простого слоя [10]. Получим

$$\begin{aligned} v^-(x) &= -\int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) dl(y) + \frac{1}{2} \varphi(x) + \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \Phi_e(x, y) \psi(y) dl(y), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (25)$$

$$v^+(x) = -\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) dl(y) - \frac{1}{2} \varphi(x) + \tag{26}$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \Phi_i(x, y) \psi(y) dl(y), \quad x \in \Gamma.$$

Следовательно,

$$v^-(x) - v^+(x) = \varphi(x) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} \right) \varphi(y) dl(y) + \int_{\Gamma} \left( \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \Phi_e(x, y) - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \Phi_i(x, y) \right) \psi(y) dl(y), \tag{27}$$

Поскольку  $(\varphi, \psi)$  – решение (15), получим  $v^- - v^+ = 0, x \in \Gamma$ .

Проверим второе условие в (8). Вычислим нормальные производные в (23) и (24), перейдем к пределу при  $x \rightarrow \Gamma$  и используем хорошо известные свойства потенциалов [10]. Получим

$$\frac{\partial v^-}{\partial n}(x) - \frac{\partial v^+}{\partial n}(x) = \psi(x) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} - \frac{\partial^2 \Phi_e(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} \right) \varphi(y) dl(y) + \int_{\Gamma} \left( \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(x)} - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(x)} \right) \psi(y) dl(y), \tag{28}$$

Поскольку  $(\varphi, \psi)$  – решение (16), получим  $\partial v^- / \partial n - \partial v^+ / \partial n = 0, x \in \Gamma$ . Таким образом, функция  $v$  удовлетворяет всем условиям (6)–(9) GCFEP, вывернутой наизнанку.

Определим функцию

$$u(x) = -\int_{\Gamma} \left( \varphi(y) \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \psi(y) \Phi_i(x, y) \right) dl(y),$$

$x \in \Omega_i,$

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left( \varphi(y) \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \psi(y) \Phi_e(x, y) \right) dl(y),$$

$x \in \Omega_e.$

Используя свойства потенциалов двойного и простого слоев, вычислим предельные значения функции  $u$  и ее нормальных производных. Объединив их с (25)–(28), получим

$$u^+(x) + v^-(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) dl(y) + \frac{1}{2} \varphi(x) -$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \Phi_e(x, y) \psi(y) dl(y) -$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) dl(y) + \frac{1}{2} \varphi(x) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \Phi_e(x, y) \psi(y) dl(y),$$

$x \in \Gamma,$

$$u^-(x) - v^+(x) = -\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) dl(y) +$$

$$+ \frac{1}{2} \varphi(x) + \int_{\Gamma} \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \Phi_i(x, y) \psi(y) dl(y) -$$

$$- \left( -\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) dl(y) - \frac{1}{2} \varphi(x) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \Phi_i(x, y) \psi(y) dl(y) \right),$$

$x \in \Gamma,$

$$\frac{\partial u^+}{\partial n}(x) + \frac{\partial v^-}{\partial n}(x) = \frac{\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \psi(x) + \frac{\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \psi(x) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 \Phi_e(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} - \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} \right) \varphi(y) dl(y) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( \frac{2\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(x)} - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(x)} \right) \psi(y) dl(y),$$

$x \in \Gamma,$

$$\frac{\partial u^-}{\partial n}(x) - \frac{\partial v^+}{\partial n}(x) = \frac{\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \psi(x) + \frac{\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \psi(x) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} - \frac{\partial^2 \Phi_e(x, y)}{\partial n(x) \partial n(y)} \right) \varphi(y) dl(y) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(x)} - \frac{2\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \frac{\partial \Phi_e(x, y)}{\partial n(x)} \right) \psi(y) dl(y),$$

$x \in \Gamma.$

Таким образом,

$$u^+ + v^- = \varphi, \quad u^- - v^+ = \varphi, \quad x \in \Gamma, \tag{29}$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial n} + \frac{\partial v^-}{\partial n} = 2 \frac{\eta_i}{\eta_e + \eta_i} \psi, \quad \frac{\partial u^-}{\partial n} - \frac{\partial v^+}{\partial n} = 2 \frac{\eta_e}{\eta_e + \eta_i} \psi,$$

$x \in \Gamma.$

Согласно предположению теоремы, имеем

$$v(z) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{31}$$

Следовательно, используя (29)–(31), получим

$$\varphi = u^+ = u^-, \quad \psi = \frac{\eta_e + \eta_i}{2\eta_i} \frac{\partial u^+}{\partial n} = \frac{\eta_e + \eta_i}{2\eta_e} \frac{\partial u^-}{\partial n},$$

$x \in \Gamma,$

$$\tag{32}$$

что соответствует определению (14). Из (32) следует, что граничные условия (3) выполняются для  $u$ . Рассуждая аналогичным образом, получим, что для функции  $u$  выполняются все другие условия исходной GCFEP (1)–(4). Таким образом, функция  $u$ , определенная в (21), (22), является собственной функ-

цией исходной GCFEP (1)–(4). Предположим, что  $u = 0$ . Используя (32), получим  $\varphi = 0$  и  $\psi = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , что противоречит утверждению теоремы о том, что  $(\varphi, \psi)$  – нетривиальное решение системы Мюллера. Наконец, заметим, что, подставив (32) в (21), (22), получим интегральные представления (10), (11).

### Вычислительные эксперименты

Проведем серию вычислительных экспериментов, направленных на иллюстрацию утверждений теоремы эквивалентности. Сначала опишем геометрию микрорезонатора. Предположим, что микрорезонатор имеет форму круга единичного радиуса. Внутренняя область микрорезонатора  $\Omega_i$  представляет собой активную область, а внешняя область  $\Omega_e$  – окружающую среду. Показатель преломления в активной области  $v_i = \alpha_i - i\gamma$ , где действительная часть показателя преломления  $\alpha_i = 2.63$ . Показатель преломления окружающей среды  $v_e = 1$ .

Определим собственные значения  $k$ , соответствующие значениям параметра  $\gamma$  для Н- и Е-поляризации. Решения исходной GCFEP (1)–(4) и вывернутой наизнанку GCFEP (6)–(9) будем искать методом разделения переменных. Решения системы граничных интегральных уравнений Мюллера (15), (16) найдем, используя метод Галеркина.

Проиллюстрируем первое утверждение теоремы для моды с номером 8 как для Н-поляризации, так и для Е-поляризации. Рисунок 3 соответствует случаю Е-поляризации, вдоль вертикальной оси расположены значения параметра  $\gamma$ , вдоль горизонтальной – значения  $k$ . Сплошные линии соответствуют нулям действительной части определителя, полученного путем применения метода разделения переменных к исходной GCFEP, пунктирные – нулям мнимой части того же определителя. Таким образом, в точках пересечения пунктирной и сплошной линий расположены решения исходной GCFEP, потому что значение определителя в этих точках равно нулю.

На рисунке 3 различимы 10 точек пересечения, каждая из них может быть использована в качестве начального приближения при поиске соответствующего точного решения. Произвольно выберем две точки и найдем соответствующие этим точкам точные решения. В качестве первой точки выберем (8.12, 0.02089), в качестве второй – (9.34, 0.302). Выбранные точки отметим на рисунке 3 черными квадратами.

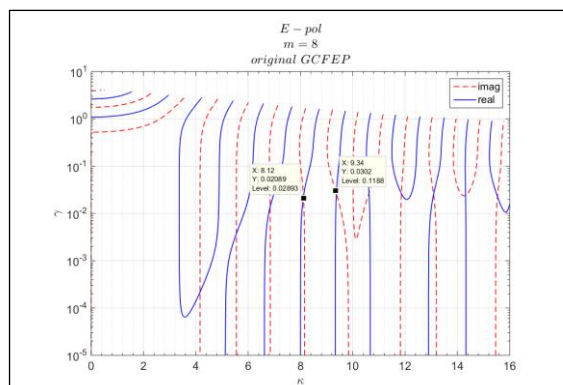


Рис. 3. Решения исходной GCFEP в случае Е-поляризации

Fig. 3. The original GCFEP solutions in the case of E-polarization

Согласно первому утверждению теоремы, решения системы Мюллера должны включать в себя решения исходной GCFEP. Чтобы проверить это, найдем решения системы Мюллера. Для начала построим рисунок 4, подобный рисунку 3.

На этом рисунке в точках, где пересекаются пунктирная и сплошная линии, находятся решения системы Мюллера, причем в тех же местах, что и решения исходной GCFEP. Каждое решение исходной GCFEP назовем истинным. Теперь отметим решения, которые не входят в число решений исходной GCFEP (назовем их фиктивными). Фиктивные решения находятся в окрестностях точек (1.16, 4.677), (1.84, 2.455), (2.62, 1.096). Это говорит о том, что исходная GCFEP и система Мюллера не эквивалентны. Среди решений системы Мюллера есть такие,

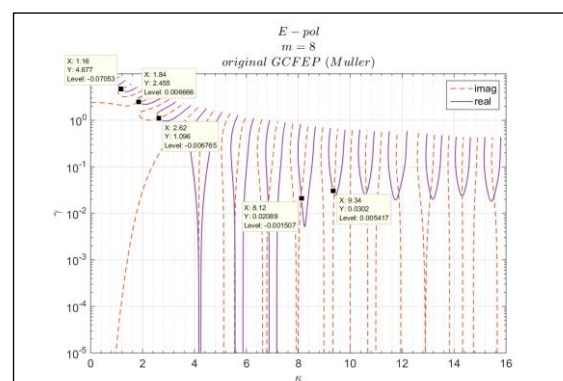


Рис. 4. Решения системы граничных интегральных уравнений Мюллера в случае Е-поляризации

Fig. 4. The Muller BIEs solutions in the case of E-polarization

которые не являются решениями исходной GCFEP.

Найдем точные решения исходной GCFEP и решения системы Мюллера. В качестве начальных приближений используем ранее выбранные точки. Результаты приведены в таблице 1.

Как видим, решения исходной GCFEP и решения системы Мюллера совпадают, по крайней мере, до 4-го знака после запятой. Таким образом, два произвольно выбранных решения GCFEP являются решениями системы Мюллера.

Проведем аналогичные исследования для случая Н-поляризации. В качестве начальных приближений выберем две точки. Пусть первая точка – (5.87, 0.007762), вторая – (7.16, 0.04786). Используя начальные приближения, найдем точные решения. Результаты приведены в таблице 1. Они показывают, что решения исходной GCFEP и системы Мюллера совпадают, по крайней мере, до 3-го знака после запятой. Как и для случая Е-поляризации, получаем, что два произвольно выбранных решения GCFEP являются решениями системы Мюллера.

Проиллюстрируем второе утверждение теоремы. Для этого найдем решение вывернутой наизнанку GCFEP (6)–(9). На рисунке 5 в точках, где пересекаются пунктирная и сплошная линии, находятся решения GCFEP, вывернутой наизнанку. Видны только три точки пересече-

ния: (1.16, 4.677), (1.84, 2.455), (2.62, 1.096). В этих же местах находятся решения системы Мюллера как для Н-, так и для Е-поляризации. Таким образом, каждое решение GCFEP, вывернутой наизнанку, является решением системы Мюллера. Чтобы убедиться в этом, найдем точные решения обеих задач. В качестве начальных приближений используем координаты точек пересечения пунктирной и сплошной линий, изображенных на рисунке 5.

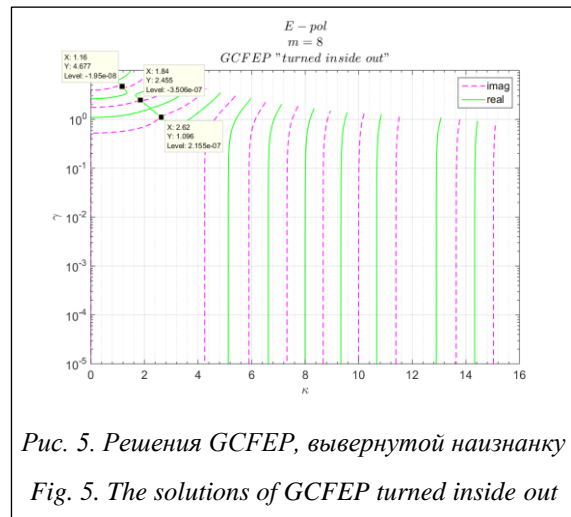


Рис. 5. Решения GCFEP, вывернутой наизнанку

Fig. 5. The solutions of GCFEP turned inside out

Сравним точные решения GCFEP, вывернутой наизнанку, с точными решениями системы Мюллера. Результаты такого сравнения приведены в таблице 2.

Таблица 1

**Точные решения исходной GCFEP и системы Мюллера**

Table 1

**The exact solutions of the original GCFEP and the Muller BIEs**

Задача	Начальное приближение	$k$	$\gamma$	Значение определителя
Исходная GCFEP, Е-поляризация	8.12, 0.02089	8.1194089465875638	0.0224740872688829	$1.7 \times 10^{-15}$
Система Мюллера, Е-поляризация	8.12, 0.02089	8.1194062447293618	0.0224738768837311	$5.2 \times 10^{-15}$
Исходная GCFEP, Е-поляризация	9.34, 0.0302	9.3425293581270346	0.0264637505102697	$3.6 \times 10^{-15}$
Система Мюллера, Е-поляризация	9.34, 0.0302	9.3425152098587638	0.0264595127455151	$1.1 \times 10^{-14}$
Исходная GCFEP, Н-поляризация	5.87, 0.007762	5.8798745905857190	0.0069967758940770	$1.8 \times 10^{-15}$
Система Мюллера, Н-поляризация	5.87, 0.007762	5.8795117899549991	0.0069374881952692	$4.0 \times 10^{-16}$
Исходная GCFEP, Н-поляризация	7.16, 0.04786	7.1626442791343132	0.0476243428759894	$4.0 \times 10^{-16}$
Система Мюллера, Н-поляризация	7.16, 0.04786	7.1626011310995139	0.0476186535024012	$2.9 \times 10^{-15}$

Таблица 2

Точные решения GCFEP, вывернутой наизнанку, и системы Мюллера

Table 2

The exact solutions of the GCFEP turned inside out and exact solutions of Muller BIEs

Задача	Начальное приближение	$k$	$\gamma$	Значение определителя
GCFEP, вывернутая наизнанку	1.16, 4.677	1.1569501948043683	4.6760002888689280	$7.9 \times 10^{-15}$
Система Мюллера, Н-поляризация	1.16, 4.677	1.1569502266217788	4.6760001657423400	$1.3 \times 10^{-14}$
Система Мюллера, Е-поляризация	1.16, 4.677	1.1569444143502281	4.6760236738919820	0
GCFEP, вывернутая наизнанку	1.84, 2.455	1.8427414582410231	2.4515291617233812	$1.21 \times 10^{-14}$
Система Мюллера, Н-поляризация	1.84, 2.455	1.8427431406167356	2.4515274205384459	$2.17 \times 10^{-14}$
Система Мюллера, Е-поляризация	1.84, 2.455	1.8426196204740266	2.4516907665531620	0
GCFEP, вывернутая наизнанку	2.62, 1.096	2.6178164481005401	1.0987921595071672	$3.2 \times 10^{-15}$
Система Мюллера, Н-поляризация	2.62, 1.096	2.6178174441660311	1.0987919841366036	$5.6 \times 10^{-15}$
Система Мюллера, Е-поляризация	2.62, 1.096	2.6177779131383061	1.0988079092001692	0

Таблица 2 показывает, что решения GCFEP, вывернутой наизнанку, и решения системы Мюллера совпадают, по крайней мере, до 3-го знака после запятой. Каждое решение GCFEP, вывернутой наизнанку, является решением системы Мюллера. Таким образом, решения системы Мюллера состоят из решений исходной GCFEP и GCFEP, вывернутой наизнанку.

На рисунке 5 в области при  $k > 4$ , где GCFEP, вывернутая наизнанку, имеет только тривиальное решение, каждое решение системы Мюллера является решением исходной GCFEP. Таким образом, можно сказать, что результаты вычислительных экспериментов соответствуют утверждениям теоремы эквивалентности, а множества истинных и фиктивных собственных значений явно разделяются.

**Описание комплекса компьютерных программ**

Программный комплекс разработан в системе MATLAB и предназначен для вычисления собственных значений и собственных функций задачи о собственных модах двумерного диэлектрического микрорезонатора с особыми областями, коэффициента направленности излучения  $D$ , угла  $\beta$  направления наиболее интенсивного пучка излучения. Программный комплекс состоит из функций:

- 0. main\_MSV\_generate\_initial
- 1. main\_calc
  - a) main\_cos\_calc
  - b) main\_sin\_calc
    - 1) InitEnvironmentParameters
    - 2) InitGeometryParameters
    - 3) InitInputData
    - 4) InitModeParameters
    - 5) solveGalerkinMethod
      - solveNeumaierMethod
    - 6) calcAdditionalData\_180

Рассмотрим применение комплекса к задаче о собственных модах круглого диэлектрического микрорезонатора с круглым отверстием. Алгоритм вычисления собственных значений и собственных функций задачи выглядит следующим образом. Функция main\_H\_MSV\_generate\_initial вызывается до начала вычислений и предназначена для подготовки начальных приближений к собственным значениям. Начальные приближения вычисляются методом разделения переменных для круглого активного микрорезонатора без отверстия. Далее в зависимости от типа искомого мод вызывается одна из функций: main\_H\_cos\_calc, main\_H\_sin\_calc.

Функции main\_H\_cos\_calc, main\_H\_sin\_calc предназначены для вычисления собственных значений и собственных функций, коэффициента направленности излучения и угла наиболее интенсивного пучка излучения.



Входные параметры функций `main_H_cos_calc` и `main_H_sin_calc`:

```
inputData.typeEnvironment - название задачи;
inputData.resultDir - путь к папке сохранения результатов вычислений;
inputData.typePolarization - тип поляризации;
inputData.typeMode - тип искомого мод;
inputData.maxIter - ограничение на число итераций в методе Ньюмаера [14];
mList - номера мод, решения которых подлежат определению;
nList - номера искомого решений;
dList - набор расстояний между центром резонатора и центром отверстия.
```

**Выходные параметры:**

`resultData` - структура, содержащая собственные значения ( $k$ ,  $\gamma$ ), собственный вектор  $w$ , коэффициент направленности  $D$ , угол  $\beta$ , соответствующие входным параметрам `inputData`.

Следующий фрагмент функции `main_H_cos_calc` представляет этап инициализации входных параметров задачи:

```
inputData.typeEnvironment = 'eccentricRing';
inputData.resultDir = strcat(strcat(cd, '/.././'), '/results/eccentricRing/');
inputData.typePolarization = 'H';
inputData.typeMode = 'cos';
inputData.maxIter = 100;
mList = [11]; nList = [1:3]; dList = [0:0.005:0.8];
```

Функция `InitEnvironmentParameters` инициализирует физические параметры микрорезонатора и параметры окружающей его среды. Значения параметров сохраняются в структуру `inputData`.

Входные параметры функции `InitEnvironmentParameters`:

```
inputData.typeEnvironment - название задачи.
```

**Выходные параметры:**

```
inputData.numContours - количество контуров микрорезонатора;
inputData.contours{m}.env.internal.alpha - показатель преломления во внутренней области микрорезонатора;
inputData.contours{m}.env.internal.type - тип среды во внутренней области микрорезонатора;
inputData.contours{m}.env.external.alpha - показатель преломления во внешней области микрорезонатора;
inputData.contours{m}.env.external.type - тип среды во внешней области микрорезонатора.
```

Следующий фрагмент `InitEnvironmentParameters` соответствует этапу инициализации параметров микрорезонатора с отверстием:

```
case 'eccentricRing'
inputData.numContours = 2;
inputData.contours{1}.env.internal.alpha = 1;
inputData.contours{1}.env.internal.type = 'passive';
inputData.contours{1}.env.external.alpha = 2.63;
inputData.contours{1}.env.external.type = 'active';
inputData.contours{2}.env.internal.alpha = 2.63;
inputData.contours{2}.env.internal.type = 'active';
inputData.contours{2}.env.external.alpha = 1;
inputData.contours{2}.env.external.type = 'passive';
end
```

Функция `InitGeometryParameters` инициализирует геометрические параметры микрорезонатора – радиус микрорезонатора  $a$ , радиус отверстия  $r$ , угол относительно центра резонатора, под которым расположен центр отверстия, расстояние  $d$  между центром резонатора и центром отверстия.

Входные параметры функции `InitGeometryParameters`:

```
inputData.typeEnvironment - название задачи.
```

**Выходные параметры:**

```
inputData.contours{m}.geom.r - радиус отверстия;
inputData.contours{m}.geom.theta - угол между центром резонатора и центром отверстия;
inputData.contours{m}.geom.d - расстояние между центром резонатора и центром отверстия.
```

Следующий фрагмент `InitGeometryParameters` соответствует этапу инициализации геометрических параметров микрорезонатора с отверстием:

```
case 'eccentricRing'
inputData.contours{1}.geom.r = 0.03;
inputData.contours{1}.geom.theta = pi;
inputData.contours{1}.geom.d = 0;
inputData.contours{2}.geom.r = 1;
inputData.contours{2}.geom.theta = 0;
inputData.contours{2}.geom.d = 0;
end
```

Когда в серии вложенных циклов зафиксированы номер моды  $m$ , номер решения  $n$  и степень тригонометрического полинома  $N$ , вызывается функция `InitInputData`. Она загружает в

структуру `inputData` начальное приближение к собственным значениям ( $k$ ,  $\gamma$ ). Начальным приближением для собственного вектора является нулевой вектор.

Входные параметры функции `InitInputData`:

```
inputData.m - номер моды;
inputData.n - номер решения;
inputData.typePolarization - тип поляризация;
inputData.typeMode - тип моды.
```

Выходные параметры:

```
inputData.k - начальное приближение к  $k$ ;
inputData.gamma - начальное приближение к  $\gamma$ .
```

Следующий фрагмент `InitInputData` соответствует Н-поляризации и четному типу мод:

```
switch inputData.typePolarization
case 'H'
    inputData.polDir =
[inputData.resultDir 'H_pol/' ];
end
mDir = [inputData.polDir 'm_'
num2str(inputData.m) '/'];
inputData.nDir = [mDir 'n_'
num2str(inputData.n) '/'];
inputData.k = 0; inputData.gamma = 0;
if(strcmp( inputData.typeMode, 'cos'))
    if exist([inputData.nDir
'/Initial_data_cos.mat'],'file')== 2
        data = load([inputData.nDir
'/Initial_data_cos.mat']);
        inputData.k = data.k;
inputData.gamma = data.gamma;
    end
end
```

Далее фиксируется значение параметра  $d$  из `dList` и вызывается функция `InitModeParameters`, которая определяет правило вычисления матрицы задачи согласно типу искомого мод.

Входные параметры функции `InitModeParameters`:

```
inputData.typeMode - тип мод.
```

Выходные параметры:

```
inputData.functions.A - указатель на функцию вычисления матрицы задачи.
```

Следующий фрагмент `InitModeParameters` соответствует четному типу мод:

```
switch inputData.typeMode
case 'cos'
    inputData.functions.A =
@matrixA_cos;
end
```

Когда определены все входные параметры, вызывается функция `solveGalerkinMethod`, которая является программной реализацией метода Галеркина. Для решения нелинейной алгебраической задачи на собственные значения,

полученной в результате применения метода Галеркина, вызывается функция `solveNeumaierMethod`. Эта функция является программной реализацией метода Ньюмаера (вариант метода обратных итераций с невязкой).

Входные параметры функции `solveNeumaierMethod`:

```
func_A - указатель на функцию, вычисляющую матрицу  $A$ ;
start_k - начальное приближение для  $k$ ;
start_gamma - начальное приближение для  $\gamma$ ;
```

```
start_w - начальное приближение для собственного вектора  $w$ ;
```

```
contours - массив структур, содержащий промежуточные вычисления для контуров резонатора;
```

```
additionalData - структура, содержащая дополнительные данные, необходимые во время вычислений.
```

Выходные параметры:

```
k - решение  $k$ ;
```

```
gamma - решение  $\gamma$ ;
```

```
w - собственный вектор  $W$ ;
```

```
count_iter - число итераций метода Ньюмаера
```

Результаты вычислений сохраняются в структуру `resultData`, которая также содержит входные параметры задачи.

Функция `calcAdditionalData_180` предназначена для вычисления коэффициента направленности  $D$  и угла  $\beta$ .

Входные параметры `calcAdditionalData_180`:

```
resultData - структура, содержащая входные параметры и решение задачи.
```

Выходные параметры:

```
resultData.D - значение коэффициента направленности излучения;
```

```
resultData.beta - значение угла направления наиболее интенсивного пучка излучения.
```

## Заключение

Сформулирована и доказана теорема эквивалентности для исходной GCFEP и системы граничных интегральных уравнений Мюллера. Численно проиллюстрированы утверждения теоремы, а также то, что спектр нелинейной задачи на собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера, порожаемой GCFEP, содержит фиктивные собственные значения. Показано, что множества истинных и фиктивных собственных значений явно разделяются.

Проведены расчеты, выполнено сравнение найденных собственных значений исходной GCFEP, GCFEP, вывернутой наизнанку, и системы Мюллера. Определен диапазон фиктивных собственных значений и показано, что эти значения явно отделены от истинных собственных значений.

Для развития результатов следует выполнить поиск таких интегральных формулировок, которые, с одной стороны, будут основаны на операторах Фредгольма, с другой – вообще не будут иметь фиктивных собственных значений или же их фиктивные собственные значения будут еще лучше отделены от истинных.

*Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).*

### Литература

1. Du W., Li C., Sun J., Xu H., Yu P., Ren A., Wu J., Wang Z. Nanolasers based on 2D materials. *Laser & Photonics Reviews*, 2020, vol. 14, no. 12, art. 2000271. DOI: 10.1002/lpor.202000271.
2. Smotrova E.I., Nosich A.I. Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity. *Optical and Quantum Electronics*, 2004, vol. 36, no. 1-3, pp. 213–221. DOI: 10.1023/B:OQEL.0000015641.19947.9c.
3. Spiridonov A.O., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for two-dimensional optical microcavities. *SIAM J. on Applied Mathematics*, 2020, vol. 80, no. 4, pp. 1977–1998. DOI: 10.1137/19M1261882.
4. Smotrova E.I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A.I. Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser. *JOSA B*, 2013, vol. 30, no. 6, pp. 1732–1742. DOI: 10.1364/JOSAB.30.001732.
5. Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Muller boundary integral equations for solving generalized complex-frequency eigenvalue problem. *Lobachevskii J. of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1377–1384. DOI: 10.1134/S1995080220070343.
6. Misawa R., Nino K., Nishimura N. Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems. *SIAM J. on Applied Mathematics*, 2017, vol. 77, no. 2, pp. 770–788. DOI: 10.1137/16M1087436.
7. Muller C. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Springer Publ., Berlin, 1969, 353 p. DOI: 10.1007/978-3-662-11773-6.
8. Steinbach O., Unger G. Combined boundary integral equations for acoustic scattering resonance problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2015, vol. 40, no. 5, pp. 1516–1530. DOI: 10.1002/mma.4075.
9. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für die wellengleichung. *Proc. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1960, vol. 24, pp. 41–53. DOI: 10.1007/BF02942018.
10. Colton D., Kress R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. SIAM Publ., Philadelphia, 2013, 271 p. DOI: 10.1137/1.9781611973167.
11. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes. *Axioms*, 2019, vol. 8, pp. 1–16. DOI: 10.3390/axioms8030101.
12. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a Fredholm operator function. *Lobachevskii J. of Mathematics*, 2018, vol. 39, no. 8, pp. 1148–1157. DOI: 10.1134/S1995080218080127.
13. Abramowitz M. *Handbook of Mathematical Functions*, 1964: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. London, Forgotten Books Publ., 2018, 1080 p.
14. Neumaier A. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 1985, vol. 22, no. 5, pp. 914–923. DOI: 10.1137/0722055.

### True and fictitious eigenvalues of the set of Muller boundary integral equations

*I.V. Ketov*<sup>1</sup>, Graduate Student, [ivketov@gmail.com](mailto:ivketov@gmail.com)

*A.O. Oktyabrskaya*<sup>2</sup>, Postgraduate Student, [alina.oktyabrskaya.21@gmail.com](mailto:alina.oktyabrskaya.21@gmail.com)

*A.O. Spiridonov*<sup>3</sup>, Ph.D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, [aospiridonov@gmail.com](mailto:aospiridonov@gmail.com)

*E.M. Karchevskii*<sup>3</sup>, Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor of Applied Mathematics and Artificial Intelligence Department, Principal Researcher of Research Laboratory of High Performance Computing, Medical Cybernetics and Machine Vision, [ekarchev70@gmail.com](mailto:ekarchev70@gmail.com)

<sup>1</sup> Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russian Federation

<sup>2</sup> Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803, USA

<sup>3</sup> Kazan Federal University, Research Laboratory for High Performance Computing, Medical Cybernetics, and Machine Vision (Institute of Computational Mathematics and Information Technologies), Kazan, 420008, Russian Federation

**Abstract.** The authors have investigated the spectrum of a nonlinear eigenvalue problem for a system of boundary integral equations theoretically and numerically. In general, eigenvalues of this problem split into two sets. The first set is the set of the true eigenvalues corresponding to the original eigenvalue problem of the Helmholtz operator. The second set is the set of fictitious eigenvalues that correspond to the so-called "turned inside-out" problem. Therefore, it is important to determine the conditions under which the original eigenvalue problem for the Helmholtz operator on a plane and the corresponding problem for the integral operator are spectrally equivalent.

The original eigenvalue problem for the Helmholtz operator is reduced to a nonlinear eigenvalue problem for the system of Muller boundary integral equations. The solutions of the original problem and the "turned inside-out" problem are found by the method of separation of variables. The solution of the system of Muller boundary integral equations is based on the Galerkin method.

The paper formulates and proves the equivalence theorem for the original eigenvalue problem for the Helmholtz operator and the system of Muller boundary integral equations. It shows that the spectrum of the nonlinear eigenvalue problem of the system of Muller boundary integral equations contains fictitious eigenvalues in addition to the true eigenvalues. There is a defined area on the complex plane that consists only of fictitious eigenvalues; and it is shown that these fictitious eigenvalues are explicitly separated from true eigenvalues.

The equivalence theorem provides a theoretical justification for the applicability of the Muller boundary integral equation method. The developed computer programs can be directly used in the modeling microdisk lasers.

**Keywords:** eigenvalue problem, Muller boundary integral equations, microdisk laser, active microcavity, spectral equivalence.

**Acknowledgements.** This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program ("PRIORITY-2030").

### References

1. Du W., Li C., Sun J., Xu H., Yu P., Ren A., Wu J., Wang Z. Nanolasers based on 2D materials. *Laser & Photonics Reviews*, 2020, vol. 14, no. 12, art. 2000271. DOI: 10.1002/lpor.202000271.
2. Smotrova E.I., Nosich A.I. Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity. *Optical and Quantum Electronics*, 2004, vol. 36, no. 1-3, pp. 213–221. DOI: 10.1023/B:OQEL.0000015641.19947.9c.
3. Spiridonov A.O., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for two-dimensional optical microcavities. *SIAM J. on Applied Mathematics*, 2020, vol. 80, no. 4, pp. 1977–1998. DOI: 10.1137/19M1261882.
4. Smotrova E.I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A.I. Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser. *JOSA B*, 2013, vol. 30, no. 6, pp. 1732–1742. DOI: 10.1364/JOSAB.30.001732.
5. Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Muller boundary integral equations for solving generalized complex-frequency eigenvalue problem. *Lobachevskii J. of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1377–1384. DOI: 10.1134/S1995080220070343.
6. Misawa R., Nino K., Nishimura N. Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems. *SIAM J. on Applied Mathematics*, 2017, vol. 77, no. 2, pp. 770–788. DOI: 10.1137/16M1087436.
7. Muller C. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Springer Publ., Berlin, 1969, 353 p. DOI: 10.1007/978-3-662-11773-6.
8. Steinbach O., Unger G. Combined boundary integral equations for acoustic scattering resonance problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2015, vol. 40, no. 5, pp. 1516–1530. DOI: 10.1002/mma.4075.
9. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für die wellengleichung. *Proc. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1960, vol. 24, pp. 41–53. DOI: 10.1007/BF02942018.

10. Colton D., Kress R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. SIAM Publ., Philadelphia, 2013, 271 p. DOI: 10.1137/1.9781611973167.
11. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes. *Axioms*, 2019, vol. 8, pp. 1–16. DOI: 10.3390/axioms8030101.
12. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a Fredholm operator function. *Lobachevskii J. of Mathematics*, 2018, vol. 39, no. 8, pp. 1148–1157. DOI: 10.1134/S1995080218080127.
13. Abramowitz M. *Handbook of Mathematical Functions, 1964: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. London, Forgotten Books Publ., 2018, 1080 p.
14. Neumaier A. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 1985, vol. 22, no. 5, pp. 914–923. DOI: 10.1137/0722055.

#### Для цитирования

Кетов И.В., Октябрьская А.О., Спиридонов А.О., Карчевский Е.М. Истинные и фиктивные собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера // Программные продукты и системы. 2022. Т. 35. № 3. С. 316–328. DOI: 10.15827/0236-235X.139.316-328.

#### For citation

Ketov I.V., Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. True and fictitious eigenvalues of the set of Muller boundary integral equations. *Software & Systems*, 2022, vol. 35, no. 3, pp. 316–328 (in Russ.). DOI: 10.15827/0236-235X.139.316-328.