

## Синхронный режим распределенных вычислений при непрерывном выполнении блоков ограниченного числа копий программного ресурса

П.А. Павлов <sup>1</sup>✉, Н.С. Коваленко <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Полесский государственный университет, г. Пинск, 225710, Республика Беларусь  
<sup>2</sup> Белорусский государственный университет, г. Минск, 220030, Республика Беларусь

### Ссылка для цитирования

Павлов П.А., Коваленко Н.С. Синхронный режим распределенных вычислений при непрерывном выполнении блоков ограниченного числа копий программного ресурса // Программные продукты и системы. 2024. Т. 37. № 1. С. 43–53. doi: 10.15827/0236-235X.142.043-053

### Информация о статье

Группа специальностей ВАК: 2.3.5

Поступила в редакцию: 14.09.2023

После доработки: 28.09.2023

Принята к публикации: 07.11.2023

**Аннотация.** При создании многопроцессорных распределенных вычислительных систем особую актуальность приобретают задачи построения и исследования математических моделей организации взаимодействия процессов, конкурирующих за программный ресурс. В связи с этим интерес представляют задачи распределенных вычислений, связанные с получением математических соотношений, которые могут иметь как прямой, так и обратный характер. При постановке прямых задач условиями являются значения параметров многопроцессорной системы, а решением – минимальное общее время реализации заданных объемов вычислений. Постановка обратных задач сводится к расчету характеристик многопроцессорных систем, поиску критериев эффективности и оптимальности организации выполнения множества распределенных конкурирующих взаимодействующих процессов. При построении и исследовании математических моделей и задач оптимальной организации распределенных процессов широко применяется аппарат теории графов, линейных диаграмм Ганта, теории расписаний, комбинаторной оптимизации, алгебры матриц и др. В работе построена математическая модель распределенных вычислений, решены задачи нахождения минимального времени выполнения неоднородных процессов, конкурирующих за использование ограниченного числа копий программного ресурса в синхронном режиме в случаях неограниченного и ограниченного параллелизма по числу процессоров многопроцессорной системы. При этом использованы идеи структурирования программного ресурса на линейно-упорядоченные блоки с их последующей конвейеризацией по процессорам многопроцессорной системы.

**Ключевые слова:** синхронный режим, распределенные вычисления, структурирование, конвейеризация, программный ресурс, диаграмма Ганта, функционал Беллмана–Джонсона

**Введение.** Распределенные вычисления – перспективная и динамично развивающаяся область организации параллелизма [1–3]. Данный термин обычно используется при параллельной обработке данных на множестве обрабатывающих устройств, удаленных друг от друга, в которых передача данных по линиям связи приводит к существенным временным задержкам. Перечисленные условия характерны, например, при организации вычислений в многомашинных вычислительных комплексах, вычислительных кластерах, многопроцессорных системах, локальных или глобальных сетях. Создание высокопроизводительных многопроцессорных систем и вычислительных комплексов характеризуется широким проникновением в аппаратное и программное обеспечение фундаментальных принципов распараллеливания и конвейеризации вычислений. В связи с этим происходит пересмотр математических методов и алгоритмов решения задач в различных предметных областях вплоть до

всего алгоритмического багажа прикладной математики, выдвигаются новые требования к построению и исследованию математических моделей, касающихся различных аспектов параллельной и конвейерной организации вычислений [4]. Необходимость и актуальность исследований в этих направлениях связана также с тем, что принципы структурирования, распараллеливания и конвейеризации носят достаточно общий характер и присущи процессам различной природы [5, 6].

Случай, когда в общей памяти многопроцессорных систем имеется одна копия программного ресурса, был изучен в работах [7–9] с различных точек зрения. Но, к сожалению, не найдено работ по математическому моделированию функционирования распределенных систем, в которых в общей памяти не одна, а несколько копий программного ресурса. Поэтому изучение задач, относящихся к оптимальной организации распределенных параллельных вычислений, приобретает особую актуаль-

ность, когда в общей памяти многопроцессорных систем может одновременно размещаться ограниченное число копий программного ресурса. Такое обобщение носит принципиальный характер ввиду того, что отражает основные черты мультиконвейерной обработки, а также позволяет сравнить эффективность конвейерной и параллельной обработки.

### Математическая модель распределенных вычислений

Конструктивными элементами для построения математических моделей, реализующих методы распределенных вычислений, являются понятия процесса и программного ресурса. Будем рассматривать процесс как последовательность наборов команд (процедур, блоков, подпрограмм)  $I_s = (1, 2, \dots, s)$ . Процессы, влияющие на поведение друг друга путем обмена информацией, называют кооперативными или взаимодействующими. Многократно выполняемую в многопроцессорной системе программу или ее часть будем называть программным ресурсом, а множество соответствующих процессов – конкурирующими.

Математическая модель системы распределенной обработки конкурирующих взаимодействующих процессов при ограниченном числе копий программного ресурса включает в себя

- $p \geq 2$  процессоров многопроцессорной системы, имеющих доступ к общей памяти;
- $n \geq 2$  распределенных конкурирующих процессов;
- $s \geq 2$  блоков структурированного на блоки программного ресурса;
- матрицу  $T = [t_{ij}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , времен выполнения блоков программного ресурса распределенными взаимодействующими конкурирующими процессами;
- $2 \leq c \leq p$  копий структурированного на блоки программного ресурса, которые могут одновременно находиться в оперативной памяти, доступной для всех  $p$  процессоров;
- $\theta > 0$  – параметр, характеризующий время дополнительных системных расходов, связанных с организацией конвейерного режима использования блоков структурированного программного ресурса множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Предположим, что число блоков программного ресурса  $s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ , где  $[x]$  – целая часть

числа, а число процессов  $n$  кратно числу копий  $c$  структурированного программного ресурса, то есть  $n = mc$ ,  $m \geq 2$ , и что взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено следующим условиям:

- 1) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока;
- 2) процессы выполняются в параллельно-конвейерном режиме группами, то есть осуществляется одновременное (параллельное) выполнение  $c$  копий каждого блока в сочетании с конвейеризацией группы из  $c$  копий  $Q_j$ -го блока по процессам и процессорам, где  $j = \overline{1, s}$ ;
- 3) обработка каждого блока программного ресурса осуществляется без прерываний;
- 4) распределение блоков  $Q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , программного ресурса по процессорам для каждого из процессов  $i = c(l-1) + q$ ,  $l = \overline{1, m}$ ,  $q = \overline{1, c}$ , где  $m = \frac{n}{c}$ , осуществляется циклически по правилу: блок с номером  $j$  распределяется на процессор с номером  $c(j-1) + q$ .

### Время выполнения неоднородных процессов при достаточном числе процессоров

В рамках математической модели распределенных вычислений при ограниченном числе копий программного ресурса исследуем первый синхронный режим взаимодействия процессов, процессоров и блоков, который обеспечивает непрерывное выполнение блоков структурированного программного ресурса внутри каждого процесса, то есть все процессы являются активными. В этом режиме в случае, когда  $2 \leq s \leq p_c$ , момент завершения выполнения  $j$ -го блока,  $j = \overline{1, s-1}$ ,  $i$ -м процессом, где  $i = c(l-1) + q$ ,  $l = \overline{1, m}$ ,  $q = \overline{1, c}$ , на  $(c(j-1) + q)$ -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего  $(j+1)$ -го блока на  $(cj + q)$ -м процессоре.

Система  $n$  распределенных конкурирующих процессов называется неоднородной, если времена выполнения блоков программного ресурса  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  зависят от объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, то есть разные для разных процессов.

Рассмотрим случай, когда число процессоров распределенной неоднородной многопроцессорной системы является достаточным, то есть  $2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ . Все множество процессов

разобьем на  $c$  подмножеств по  $m$  процессов в каждом, причем в каждое  $q$ -е подмножество будут включены процессы с номерами  $i = c(l-1) + q$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $l = \overline{1, m}$ , блоки которых будут выполняться на  $(c(j-1) + q)$ -х процессорах,  $j = \overline{1, s}$ .

Обозначим через  $T_{1c}^H(p, n, s, c, \theta)$  время выполнения  $n$  неоднородных конкурирующих процессов, использующих  $c$  копий программного ресурса, структурированного на  $s$  линейно-упорядоченных блоках  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  с матрицей времен выполнения с учетом дополнительных системных расходов  $T^\theta = [t_{ij}^\theta]_{n \times s} = [t_{ij}^\theta + \theta]_{n \times s}$  в первом синхронном режиме. Предполагается, что выполнение процессов осуществляется в вычислительной системе с  $p$  процессорами и каждый из процессов является распределенным.

Построим диаграмму Ганта, иллюстрирующую функционирование распределенной системы (рис. 1) с параметрами  $p = 7, n = 6, s = 3$ ,

$$c = 2, T^\theta = \begin{bmatrix} t_{11}^\theta = 3 & t_{12}^\theta = 1 & t_{13}^\theta = 4 \\ t_{21}^\theta = 2 & t_{22}^\theta = 2 & t_{23}^\theta = 1 \\ t_{31}^\theta = 1 & t_{32}^\theta = 3 & t_{33}^\theta = 3 \\ t_{41}^\theta = 4 & t_{42}^\theta = 1 & t_{43}^\theta = 2 \\ t_{51}^\theta = 3 & t_{52}^\theta = 2 & t_{53}^\theta = 1 \\ t_{61}^\theta = 1 & t_{62}^\theta = 4 & t_{63}^\theta = 1 \end{bmatrix}.$$

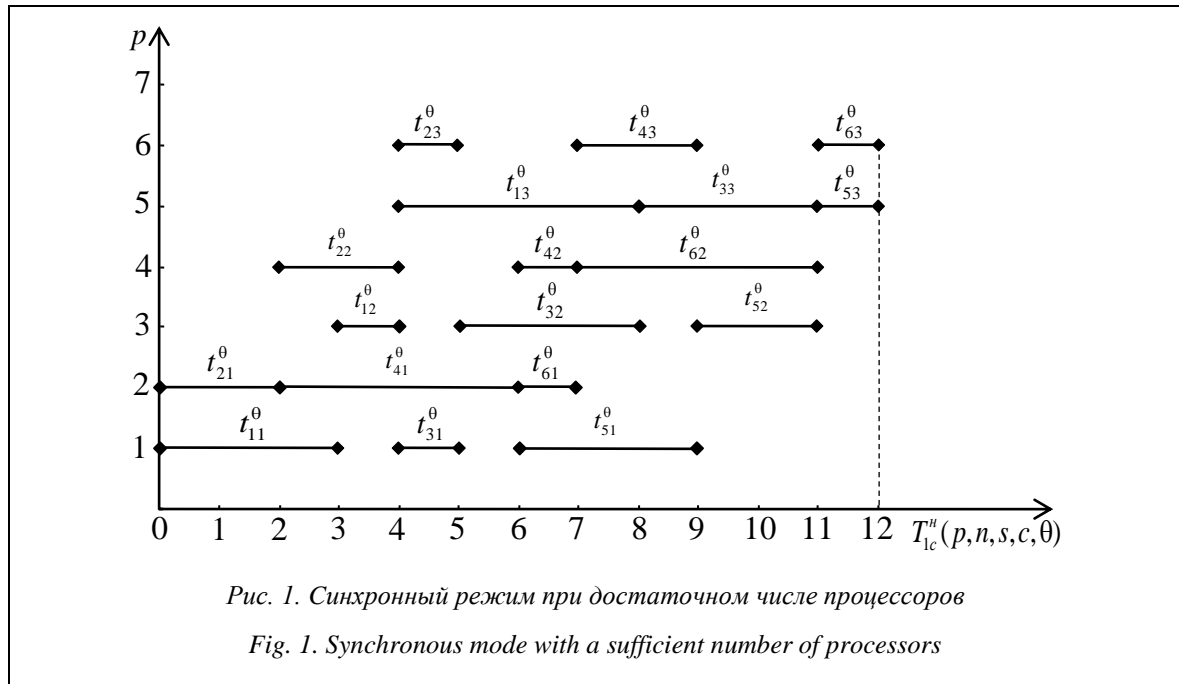
Для вычисления времени выполнения  $T_{1c}^H(p, n, s, c, \theta)$  имеет место формула

$$T_{1c}^H(p, n, s, c, \theta) = \max_{1 \leq q \leq c} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq s} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, j}^\theta \right] + \sum_{j=1}^s t_{c(m-1)+q, j}^\theta \right). \quad (1)$$

Здесь  $\max_{1 \leq u \leq s} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, j}^\theta \right]$ ,  $i = \overline{1, m-1}$  – начало выполнения первого блока для каждого из последующих процессов, начиная с  $(ci + q)$ -го в  $q$ -м подмножестве процессов, а  $\sum_{j=1}^s t_{c(m-1)+q, j}^\theta$  – длительность выполнения последнего процесса  $q$ -го подмножества, где  $q = \overline{1, c}$  [10].

Найдем  $T_{1c}^H(p, n, s, c, \theta)$  по данным примера, используя формулу (1):

$$\begin{aligned} T_{1c}^H(7, 6, 3, 2, \theta) &= \max_{1 \leq q \leq 2} \left( \sum_{i=1}^2 \max_{1 \leq u \leq 3} \left[ \sum_{j=1}^u t_{2(i-1)+q, j}^\theta - \sum_{j=1}^{u-1} t_{2i+q, j}^\theta \right] + \sum_{j=1}^3 t_{4+q, j}^\theta \right) = \\ &= \max_{1 \leq q \leq 2} \left( \sum_{i=1}^2 \max_{j=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^1 t_{2(i-1)+q, j}^\theta, \sum_{j=1}^2 t_{2(i-1)+q, j}^\theta - \sum_{j=1}^2 t_{2i+q, j}^\theta \right] + \sum_{j=1}^3 t_{4+q, j}^\theta \right) = \\ &= \max_{1 \leq q \leq 2} \left( \sum_{i=1}^2 \max_{j=1}^3 \left[ t_{2(i-1)+q, 1}^\theta, t_{2(i-1)+q, 1}^\theta + t_{2(i-1)+q, 2}^\theta - t_{2i+q, 1}^\theta, t_{2(i-1)+q, 1}^\theta + t_{2(i-1)+q, 2}^\theta + t_{2(i-1)+q, 3}^\theta - t_{2i+q, 1}^\theta - t_{2i+q, 2}^\theta \right] \right) + \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} & + \sum_{j=1}^3 t_{4+q,j}^0 \end{aligned} \right\} = \max \left( \begin{aligned} & \max \begin{bmatrix} t_{11}^0, \\ t_{11}^0 + t_{12}^0 - t_{31}^0, \\ t_{11}^0 + t_{12}^0 + t_{13}^0 - t_{31}^0 - t_{32}^0 \end{bmatrix} + n \\ & \max \begin{bmatrix} t_{21}^0, \\ t_{21}^0 + t_{22}^0 - t_{41}^0, \\ t_{21}^0 + t_{22}^0 + t_{23}^0 - t_{41}^0 - t_{42}^0 \end{bmatrix} + l \end{aligned} \right) \\
 & + \max \left( \begin{aligned} & \begin{bmatrix} t_{31}^0, \\ t_{31}^0 + t_{32}^0 - t_{51}^0, \\ t_{31}^0 + t_{32}^0 + t_{33}^0 - t_{51}^0 - t_{52}^0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^3 t_{5j}^0, \\ & \begin{bmatrix} t_{41}^0, \\ t_{41}^0 + t_{42}^0 - t_{61}^0, \\ t_{41}^0 + t_{42}^0 + t_{43}^0 - t_{61}^0 - t_{62}^0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^3 t_{6j}^0 \end{aligned} \right) = \\
 & = \max \left( \max [3, 3, 4] + \max [1, 1, 2] + 6, \right. \\
 & \left. \max [2, 0, 0] + \max [4, 4, 2] + 6 \right) = 12.
 \end{aligned}$$

Следовательно, время выполнения  $T_{1c}^H(7, 6, 3, 2, \theta) = 12$ , что совпадает со временем на диаграмме Ганта (рис. 1).

**Время реализации неоднородных процессов в условиях ограниченного параллелизма**

Рассмотрим общий случай, то есть когда  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ , причем  $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ ,  $k \geq 1$ . Выполним разбиение всех блоков на  $k$  групп по  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  бло-

ков в каждой. Тогда матрица времен выполнения блоков структурированного программного ресурса с учетом дополнительных системных расходов  $\theta$ , связанных с организацией конвейерного режима использования блоков множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке  $T^0 = [t_{ij}^0]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , разобьется на  $k$  подматриц  $T_\varphi^0$  представленного далее вида размерностью  $n \times \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  каждая,  $\varphi = \overline{1, k}$ .

$$T_\varphi^0 = \begin{bmatrix} t^0 & t^0 & \dots & t^0 \\ t_{1,(\varphi-1)\lceil \frac{p}{c} \rceil+1}^0 & t_{1,(\varphi-1)\lceil \frac{p}{c} \rceil+2}^0 & \dots & t_{1,\varphi\lceil \frac{p}{c} \rceil}^0 \\ t^0 & t^0 & \dots & t^0 \\ t_{2,(\varphi-1)\lceil \frac{p}{c} \rceil+1}^0 & t_{2,(\varphi-1)\lceil \frac{p}{c} \rceil+2}^0 & \dots & t_{2,\varphi\lceil \frac{p}{c} \rceil}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^0 & t^0 & \dots & t^0 \\ t_{n,(\varphi-1)\lceil \frac{p}{c} \rceil+1}^0 & t_{n,(\varphi-1)\lceil \frac{p}{c} \rceil+2}^0 & \dots & t_{n,\varphi\lceil \frac{p}{c} \rceil}^0 \end{bmatrix}, \quad \varphi = \overline{1, k},$$

где  $k = \left\lceil \frac{cs}{p} \right\rceil$ . (2)

На рисунке 2 изображена диаграмма Ганта для многопроцессорных систем с параметрами  $p = 7$ ,  $n = 4$ ,  $s = 6$ ,  $c = 2$ ,

$$T^0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из анализа диаграмм Ганта (рис. 2) видно, что каждая из них отображает во времени вы-

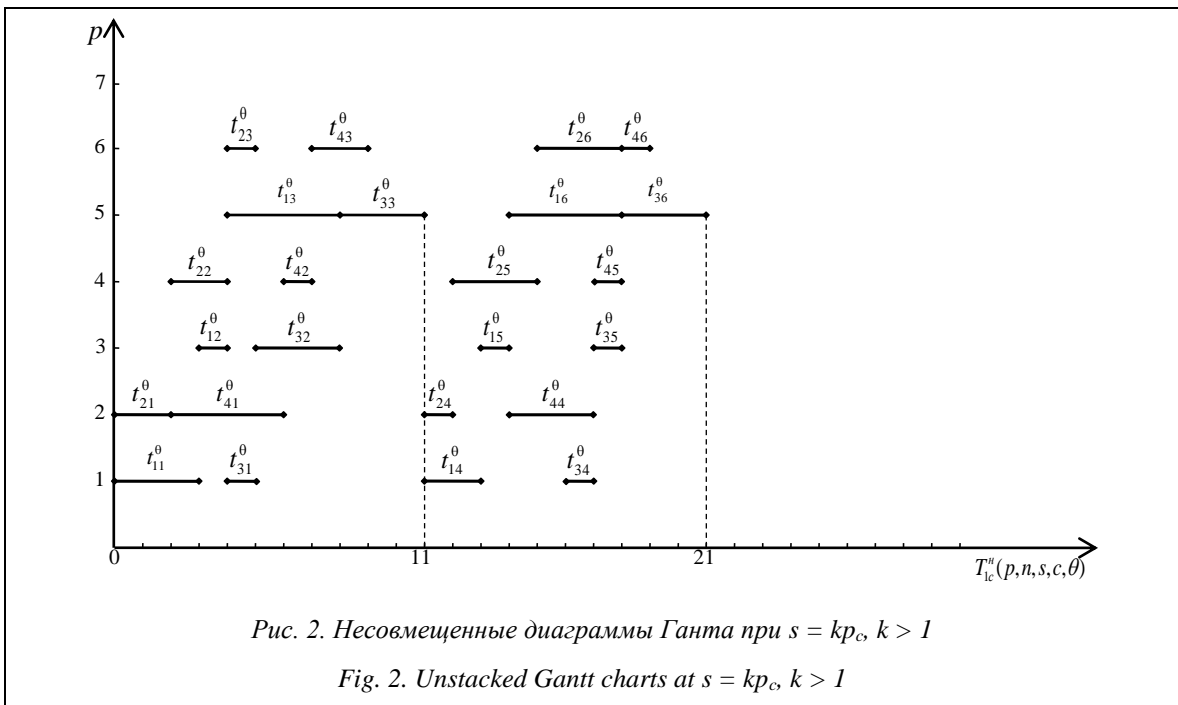


Рис. 2. Несовмещенные диаграммы Ганта при  $s = kp_c$ ,  $k > 1$

Fig. 2. Unstacked Gantt charts at  $s = kp_c$ ,  $k > 1$

полнение очередных  $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  блоков программного ресурса на  $c \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  процессорах всеми  $n$  процессами, причем при  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  непрерывность выполнения блоков структурированного программного ресурса может нарушиться при переходе от  $\varphi$ -й группы блоков к  $(\varphi + 1)$ -й,  $\varphi = \overline{1, k-1}$ , а внутри каждой из групп непрерывное выполнение блоков каждого процесса сохраняется.

Для дальнейшего исследования, как и при достаточном числе процессоров, все множество процессов разобьем на подмножества, причем каждое из них будет состоять из  $m$  процессов с номерами  $i = c(l-1) + q$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $l = \overline{1, m}$ , которые будут выполняться на процессорах с номерами  $(c(j-1) + q)$ ,  $j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$ , и введем следующие обозначения:

- $t_{ij}^{q,\varphi} = t_{c(i-1)+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$  – время выполнения

$i$ -м процессом из  $q$ -го подмножества процессов  $j$ -го блока из  $\varphi$ -й группы блоков с учетом параметра  $\theta$ ,  $\varphi = \overline{1, k}$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$ ;

- $T_q^\varphi = \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{c(i+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \right] + \sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t_{c(m-1)+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$  – время выполнения  $q$ -го подмножества процессов в  $\varphi$ -й

группе блоков  $\varphi = \overline{1, k}$ ,  $q = \overline{1, c}$ ;

- $T_\varphi^\theta = \max_{1 \leq q \leq c} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{c(i+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \right] + \sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t_{c(m-1)+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \right)$

$$- \sum_{j=1}^{u-1} t_{c(i+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \right] + \sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t_{c(m-1)+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \Big) = \max_{1 \leq q \leq c} T_q^\varphi$$

– общее время выполнения  $\varphi$ -й группы блоков всеми  $n$  процессами на  $c \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$  процессорах,  $\varphi = \overline{1, k}$ ;

- $E_{ij}^{q,\varphi} = E_{c(i-1)+q, j}^\varphi = \sum_{\mu=1}^{i-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[ \sum_{w=1}^u t_{c(\mu-1)+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} - \sum_{w=1}^{u-1} t_{c(\mu+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \right] + \sum_{w=1}^j t_{c(i-1)+q, (c(j-1)+q)}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$  – время завершения обработки  $i$ -м процессом  $q$ -го подмножества  $j$ -го блока из  $\varphi$ -й группы блоков, где

$\varphi = \overline{1, k}$ ,  $q = \overline{1, c}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$ .

Найдем значения  $t_{ij}^{q,\varphi}$ ,  $T_q^\varphi$ ,  $T_\varphi^\theta$ ,  $E_{ij}^{q,\varphi}$  для многопроцессорной системы, изображенной на рисунке 2:

$$T_1^1 = \sum_{i=1}^1 \max_{1 \leq u \leq 3} \left[ \sum_{j=1}^u t_{2(i-1)+1, j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{2i+1, j}^0 \right] + \sum_{j=1}^3 t_{3, j}^0 =$$

$$= \max \left[ t_{11}^0, t_{11}^0 + t_{12}^0 - t_{31}^0, t_{11}^0 + t_{12}^0 + t_{13}^0 - t_{31}^0 - t_{32}^0 \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^3 t_{3, j}^0 = \max [3, 3, 4] + 7 = 11;$$

$$T_2^1 = \sum_{i=1}^1 \max_{1 \leq u \leq 3} \left[ \sum_{j=1}^u t_{2(i-1)+2, j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{2i+2, j}^0 \right] + \sum_{j=1}^3 t_{4, j}^0 = 9;$$

$$T_1^2 = \sum_{i=1}^1 \max_{1 \leq u \leq 3} \left[ \sum_{j=1}^u t_{2(i-1)+1, 3+j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{2i+1, 3+j}^0 \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^3 t_{3, 3+j}^0 = 10;$$

$$T_2^2 = \sum_{i=1}^1 \max_{1 \leq u \leq 3} \left[ \sum_{j=1}^u t_{2(i-1)+2, 3+j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{2i+2, 3+j}^0 \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^3 t_{4, 3+j}^0 = 8;$$

$\varphi = 1$	$q = 1$	$i = 1$	$j = \overline{1, 3}$	$t_{11}^{1,1} = t_{11}^0 = 3$ , $t_{12}^{1,1} = t_{12}^0 = 1$ , $t_{13}^{1,1} = t_{13}^0 = 4$
		$i = 2$	$j = \overline{1, 3}$	$t_{21}^{1,1} = t_{31}^0 = 1$ , $t_{22}^{1,1} = t_{32}^0 = 3$ , $t_{23}^{1,1} = t_{33}^0 = 3$
	$q = 2$	$i = 1$	$j = \overline{1, 3}$	$t_{11}^{2,1} = t_{21}^0 = 2$ , $t_{12}^{2,1} = t_{22}^0 = 2$ , $t_{13}^{2,1} = t_{23}^0 = 1$
		$i = 2$	$j = \overline{1, 3}$	$t_{21}^{2,1} = t_{41}^0 = 4$ , $t_{22}^{2,1} = t_{42}^0 = 1$ , $t_{23}^{2,1} = t_{43}^0 = 2$
$\varphi = 2$	$q = 1$	$i = 1$	$j = \overline{1, 3}$	$t_{11}^{1,2} = t_{14}^0 = 2$ , $t_{12}^{1,2} = t_{15}^0 = 1$ , $t_{13}^{1,2} = t_{16}^0 = 4$
		$i = 2$	$j = \overline{1, 3}$	$t_{21}^{1,2} = t_{34}^0 = 1$ , $t_{22}^{1,2} = t_{35}^0 = 1$ , $t_{23}^{1,2} = t_{36}^0 = 3$
	$q = 2$	$i = 1$	$j = \overline{1, 3}$	$t_{11}^{2,2} = t_{24}^0 = 1$ , $t_{12}^{2,2} = t_{25}^0 = 3$ , $t_{13}^{2,2} = t_{26}^0 = 3$
		$i = 2$	$j = \overline{1, 3}$	$t_{21}^{2,2} = t_{44}^0 = 3$ , $t_{22}^{2,2} = t_{45}^0 = 1$ , $t_{23}^{2,2} = t_{46}^0 = 1$

$$T_1^0 = \max_{1 \leq q \leq 2} T_q^1 = \max(11, 9) = 11;$$

$$T_2^0 = \max_{1 \leq q \leq 2} T_2^q = \max(10, 8) = 10.$$

Если  $\varphi = 1, q = 1, i = 1$ , имеем  $E_{1j}^{1,1} = E_{1j}^1 =$

$$= \sum_{w=1}^j t_{1w}^0, \quad j = \overline{1, 3}, \text{ тогда}$$

$$E_{11}^{1,1} = E_{11}^1 = \sum_{w=1}^1 t_{1w}^0 = t_{11}^0 = 3;$$

$$E_{12}^{1,1} = E_{12}^1 = \sum_{w=1}^2 t_{1w}^0 = t_{11}^0 + t_{12}^0 = 3 + 1 = 4;$$

$$E_{13}^{1,1} = E_{13}^1 = \sum_{w=1}^3 t_{1w}^0 = t_{11}^0 + t_{12}^0 + t_{13}^0 = 3 + 1 + 4 = 8.$$

Если  $\varphi = 1, q = 1, i = 2$ , имеем

$$E_{2j}^{1,1} = E_{3j}^1 = \sum_{\mu=1}^j \max_{1 \leq u \leq 3} \left[ \sum_{w=1}^{\mu} t_{2(\mu-1)+1,w}^0 - \sum_{w=1}^{\mu-1} t_{2\mu+1,w}^0 \right] + \sum_{w=1}^j t_{3w}^0 =$$

$$= \sum_{\mu=1}^j \max \left[ \begin{array}{l} \sum_{w=1}^1 t_{2(\mu-1)+1,w}^0, \\ \sum_{w=1}^2 t_{2(\mu-1)+1,w}^0 - \sum_{w=1}^1 t_{2\mu+1,w}^0, \\ \sum_{w=1}^3 t_{2(\mu-1)+1,w}^0 - \sum_{w=1}^2 t_{2\mu+1,w}^0 \end{array} \right] + \sum_{w=1}^j t_{3w}^0 =$$

$$= \max \left[ \begin{array}{l} \sum_{w=1}^1 t_{1w}^0, \\ \sum_{w=1}^2 t_{1w}^0 - \sum_{w=1}^1 t_{3w}^0, \\ \sum_{w=1}^3 t_{1w}^0 - \sum_{w=1}^2 t_{3w}^0 \end{array} \right] + \sum_{w=1}^j t_{3w}^0 =$$

$$= \max \left[ \begin{array}{l} t_{11}^0, \\ t_{11}^0 + t_{12}^0 - t_{31}^0, \\ t_{11}^0 + t_{12}^0 + t_{13}^0 - t_{31}^0 - t_{32}^0 \end{array} \right] + \sum_{w=1}^j t_{3w}^0 = 4 + \sum_{w=1}^j t_{3w}^0,$$

$j = \overline{1, 3}$ , тогда

$$E_{21}^{1,1} = E_{31}^1 = 4 + \sum_{w=1}^1 t_{3w}^0 = 4 + t_{31}^0 = 4 + 1 = 5;$$

$$E_{22}^{1,1} = E_{32}^1 = 4 + \sum_{w=1}^2 t_{3w}^0 = 4 + t_{31}^0 + t_{32}^0 = 4 + 1 + 3 = 8;$$

$$E_{23}^{1,1} = E_{33}^1 = 4 + \sum_{w=1}^3 t_{3w}^0 = 4 + t_{31}^0 + t_{32}^0 + t_{33}^0 = 4 + 1 + 3 + 3 = 11.$$

Если  $\varphi = 1, q = 2, i = 1$ , имеем  $E_{1j}^{2,1} = E_{2j}^1 =$

$$= \sum_{w=1}^j t_{2w}^0, \quad j = \overline{1, 3}, \text{ тогда}$$

$$E_{11}^{2,1} = E_{21}^1 = 2; \quad E_{12}^{2,1} = E_{22}^1 = 4; \quad E_{13}^{2,1} = E_{23}^1 = 5.$$

Если  $\varphi = 1, q = 2, i = 2$ , имеем  $E_{2j}^{2,1} = E_{4j}^1 =$   
 $= 2 + \sum_{w=1}^j t_{4w}^0, \quad j = \overline{1, 3}$ , тогда

$$E_{21}^{2,1} = E_{41}^1 = 6; \quad E_{22}^{2,1} = E_{42}^1 = 7; \quad E_{23}^{2,1} = E_{43}^1 = 9.$$

Если  $\varphi = 2, q = 1, i = 1$ , имеем  $E_{11}^{1,2} = E_{11}^2 = 2; E_{12}^{1,2} = E_{12}^2 = 3; E_{13}^{1,2} = E_{13}^2 = 7.$

Если  $\varphi = 2, q = 1, i = 2$ , имеем  $E_{21}^{1,2} = E_{31}^2 = 6; E_{22}^{1,2} = E_{32}^2 = 7; E_{23}^{1,2} = E_{33}^2 = 10.$

Если  $\varphi = 2, q = 2, i = 1$ , имеем  $E_{11}^{2,2} = E_{21}^2 = 1; E_{12}^{2,2} = E_{22}^2 = 4; E_{13}^{2,2} = E_{23}^2 = 7.$

Если  $\varphi = 2, q = 2, i = 2$ , имеем  $E_{21}^{2,2} = E_{41}^2 = 6; E_{22}^{2,2} = E_{42}^2 = 7; E_{23}^{2,2} = E_{43}^2 = 8.$

Из анализа диаграмм Ганта (рис. 2) видно, что минимальное общее время выполнения неоднородных распределенных процессов, конкурирующих за использование  $c$  копий структурированного программного ресурса в случае  $s > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, k \geq 1$ , определяется как сумма длин составляющих диаграмм, то есть

$$T_{1c}^n(p, n, s, c, \theta) = T_{1c}^n \left( p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta \right) =$$

$$= \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^0 = \sum_{\varphi=1}^k \max_{1 \leq q \leq c} T_{\varphi}^q.$$

Время  $T_{1c}^n \left( p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta \right)$  можно существенно сократить, если воспользоваться совмещением последовательных диаграмм Ганта по оси времени справа налево. В результате совмещения получим

$$T_{1c}^n \left( p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta \right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^0 - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_{\varphi},$$

где  $\delta_{\varphi} = \min(\delta_{\varphi}^{\cdot}, \delta_{\varphi}^{\cdot\cdot})$ ,  $\varphi = \overline{1, k-1}$  – длина отрезка максимально возможного совмещения двух последовательных диаграмм Ганта по оси времени.

Здесь  $\delta_{\varphi}^{\cdot}$  – отрезок возможного совмещения по оси времени, который представляет собой разность между моментом начала выполнения  $j$ -го блока первым процессом  $q$ -го подмножества процессов в  $(\varphi + 1)$ -й группе блоков и моментом завершения выполнения  $j$ -го блока последним процессом  $q$ -го подмножества процессов в  $\varphi$ -й группе блоков, то есть

$$\delta_{\varphi}^{\cdot} = \min_{1 \leq q \leq c} \left( T_{\varphi}^0 - T_q^{\varphi} + \min_{1 \leq j \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[ \sum_{w=j+1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} t_{c(m-1)+q, (\varphi-1) \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + w}^0 \right] + \right.$$

$$+ \sum_{w=1}^{j-1} t_{q,\varphi}^{\theta} \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + w \Bigg) =$$

$$= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq j \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \left[ T_{\varphi}^{\theta} - E_{c(m-1)+q,j}^{\varphi} + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q,\varphi}^{\theta} \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + w \right] \right),$$

$$\varphi = \overline{1, k-1}.$$

Значение  $\delta_{\varphi}^{\theta}$  представляет собой разность между началом выполнения первого блока  $i$ -м процессом в  $(\varphi+1)$ -й группе блоков и моментом завершения выполнения последнего блока  $i$ -м процессом в  $\varphi$ -й группе блоков, то есть

$$\delta_{\varphi}^{\theta} = \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_{\varphi}^{\theta} - E_{i, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}^{q,\varphi} + E_{i1}^{q,\varphi+1} - t_{i1}^{q,\varphi+1} \right] \right) =$$

$$= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_{\varphi}^{\theta} - E_{c(i-1)+q, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}^{\varphi} + E_{c(i-1)+q,1}^{\varphi+1} - t_{c(i-1)+q, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}^{\varphi} \right] \right), \quad \varphi = \overline{1, k-1}.$$

Для многопроцессорных систем (рис. 2) получим

$$\delta_1^{\theta} = \min_{1 \leq q \leq 2} \left( T_1^{\theta} - T_q^{\theta} + \min_{1 \leq j \leq 3} \left[ \sum_{w=j+1}^3 t_{2+q,w}^{\theta} + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q,3+w}^{\theta} \right] \right) =$$

$$= \min_{1 \leq q \leq c} \left( T_1^{\theta} - T_q^{\theta} + \min_{w=2}^3 t_{2+q,w}^{\theta} + \sum_{w=3}^3 t_{2+q,w}^{\theta} + \right)$$

$$+ \sum_{w=1}^1 t_{q,3+w}^{\theta}, \sum_{w=1}^2 t_{q,3+w}^{\theta} \Bigg) =$$

$$= \min \left( T_1^{\theta} - T_1^{\theta} + t_{32}^{\theta} + t_{33}^{\theta}, T_1^{\theta} - T_1^{\theta} + t_{33}^{\theta} + t_{14}^{\theta}, \right.$$

$$T_1^{\theta} - T_2^{\theta} + t_{42}^{\theta} + t_{43}^{\theta}, T_1^{\theta} - T_2^{\theta} + t_{43}^{\theta} + t_{24}^{\theta},$$

$$T_1^{\theta} - T_1^{\theta} + t_{14}^{\theta} + t_{15}^{\theta},$$

$$\left. T_1^{\theta} - T_2^{\theta} + t_{24}^{\theta} + t_{25}^{\theta} \right) =$$

$$= \min \left( T_1^{\theta} - E_{31}^1, T_1^{\theta} - E_{32}^1 + t_{14}^{\theta}, T_1^{\theta} - E_{33}^1 + t_{14}^{\theta} + t_{15}^{\theta}, \right.$$

$$\left. T_1^{\theta} - E_{41}^1, T_1^{\theta} - E_{42}^1 + t_{24}^{\theta}, T_1^{\theta} - E_{43}^1 + t_{24}^{\theta} + t_{25}^{\theta} \right) =$$

$$= \min(6, 5, 3, 5, 5, 6) = 3;$$

$$\delta_1^{\theta} = \min_{1 \leq q \leq 2} \left( \min_{1 \leq i \leq 2} \left[ T_1^{\theta} - E_{i3}^{q,1} + E_{i1}^{q,2} - t_{i1}^{q,2} \right] \right) =$$

$$= \min_{1 \leq q \leq 2} \left( \min_{1 \leq i \leq 2} \left[ T_1^{\theta} - E_{i3}^{q,1} + E_{i1}^{q,2} - t_{i1}^{q,2}, T_1^{\theta} - E_{23}^{q,1} + \right. \right.$$

$$\left. + E_{21}^{q,2} - t_{21}^{q,2} \right] \right) =$$

$$= \min \left( T_1^{\theta} - E_{13}^{1,1} + E_{11}^{1,2} - t_{11}^{1,2}, T_1^{\theta} - E_{23}^{1,1} + E_{21}^{1,2} - t_{21}^{1,2}, \right.$$

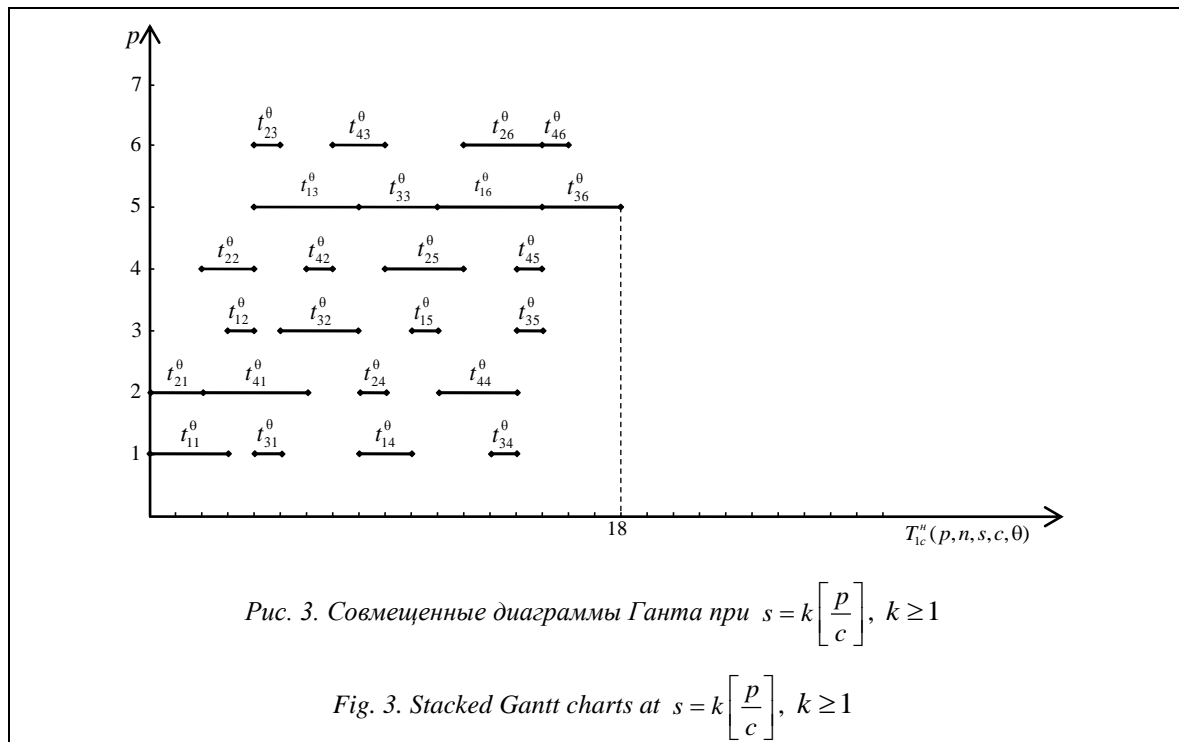
$$T_1^{\theta} - E_{13}^{2,1} + E_{11}^{2,2} - t_{11}^{2,2}, T_1^{\theta} - E_{23}^{2,1} + E_{21}^{2,2} - t_{21}^{2,2} \left. \right) =$$

$$= \min \left( T_1^{\theta} - E_{13}^1 + E_{11}^2 - t_{14}^{\theta}, T_1^{\theta} - E_{33}^1 + E_{31}^2 - t_{34}^{\theta}, \right.$$

$$\left. T_1^{\theta} - E_{23}^1 + E_{21}^2 - t_{24}^{\theta}, T_1^{\theta} - E_{43}^1 + E_{41}^2 - t_{44}^{\theta} \right) =$$

$$= \min(3, 5, 6, 5) = 3.$$

Тогда  $\delta_1 = \min(\delta_1^1, \delta_1^{\theta}) = \min(3, 3) = 3$ . Следовательно, время выполнения  $T_{1c}^H(7, 4, 6, 2, \theta) = 21 - 3 = 18$  (рис. 3).



В случае, когда  $s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ , все множество из  $s$  блоков разбивается на  $(k+1)$  групп по  $\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$  блока(ов) в каждой, за исключением последней, в которой будет только  $r$  блока(ов) программного ресурса. Тогда время выполнения  $n$  неоднородных распределенных конкурирующих процессов, использующих  $c$  копий структурированного на  $s$  блока(ов) программного ресурса в вычислительной системе с  $p$  процессорами в первом синхронном режиме, будет определяться по формулам:

$$T_{1c}^n(p, n, s, c, \theta) = T_{1c}^n\left(p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, c, \theta\right) =$$

$$= \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^0 + T_{k+1}^0 - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_{\varphi} - \delta_k =$$

$$= \sum_{\varphi=1}^k \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{\varphi} + \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{k+1} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \delta_{\varphi} - \delta_k,$$

где  $T_{k+1}^0$  – время выполнения  $(k+1)$ -й группы из  $r$  блоков всеми  $n$  процессами,  $T_q^{k+1}$  – время выполнения  $q$ -го подмножества из  $m$  процессов в  $(k+1)$ -й группе блоков,  $q = \overline{1, c}$ , а  $\delta_k$  – величина максимально допустимого совмещения по оси времени  $k$ -й и  $(k+1)$ -й диаграмм.

Значения  $T_{k+1}^0$ ,  $T_q^{k+1}$  и  $\delta_k$  определяются по следующим формулам:

- $T_q^{k+1} = \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^0 \right] + \sum_{j=1}^r t_{c(m-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^0$ ,  $q = \overline{1, c}$ ;
- $T_{k+1}^0 = \max_{1 \leq q \leq c} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[ \sum_{j=1}^u t_{c(i-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{ci+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^0 \right] + \sum_{j=1}^r t_{c(m-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}^0 \right) = \max_{1 \leq q \leq c} T_q^{k+1}$ ;
- $\delta_k = \min(\delta_k^i, \delta_k^v)$ .

Здесь

$$\delta_k^i = \min_{1 \leq q \leq c} \left( T_k^0 - T_q^k + \min_{1 \leq j \leq r} \left[ \sum_{w=j+1}^{\lfloor p/c \rfloor} t_{c(m-1)+q, (k-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w}^0 + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w}^0 \right] \right) = \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq j \leq r} \left[ T_k^0 - E_{c(m-1)+q, j}^k + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w}^0 \right] \right);$$

$$+ \sum_{w=1}^{j-1} t_{q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w}^0 \right];$$

$$\delta_k^v = \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_k^0 - E_{i, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^{0, k} + E_{i1}^{0, k+1} - t_{i1}^{q, k+1} \right] \right) =$$

$$= \min_{1 \leq q \leq c} \left( \min_{1 \leq i \leq m} \left[ T_k^0 - E_{c(i-1)+q, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor}^k + E_{c(i-1)+q, 1}^{k+1} - t_{c(i-1)+q, 1}^0 \right] \right);$$

$$E_{ij}^{q, k+1} = E_{c(i-1)+q, j}^{k+1} = \sum_{\mu=1}^{i-1} \max_{1 \leq u \leq r} \left[ \sum_{w=1}^u t_{c(\mu-1)+q, (k+1)r+w}^0 - \sum_{w=1}^{u-1} t_{c\mu+q, (k+1)r+w}^0 \right] + \sum_{w=1}^j t_{c(i-1)+q, (k+1)r+w}^0, \quad q = \overline{1, c},$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, r}.$$

На рисунках 4 и 5 для распределенной вычислительной многопроцессорной системы с параметрами  $p = 6$ ,  $n = 4$ ,  $s = 8$ ,  $c = 2$ ,

$$T^0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ построены не-}$$

совмещенные и совмещенные диаграммы Ганта. Найдем минимальное время выполнения процессов для данной многопроцессорной системы:

$$T_1^3 = \max_{1 \leq u \leq 2} \left[ \sum_{j=1}^u t_{1, 6+j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{3, 6+j}^0 \right] + \sum_{j=1}^2 t_{3, 6+j}^0 =$$

$$= \max [t_{17}^0 = 2, t_{17}^0 + t_{18}^0 - t_{37}^0 = 0] + 4 = 6;$$

$$T_2^3 = \max_{1 \leq u \leq 2} \left[ \sum_{j=1}^u t_{2, 6+j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{4, 6+j}^0 \right] + \sum_{j=1}^2 t_{4, 6+j}^0 =$$

$$= \max [t_{27}^0 = 2, t_{27}^0 + t_{28}^0 - t_{47}^0 = 2] + 7 = 9;$$

$$T_3^0 = \max_{1 \leq q \leq 2} \left( \max_{1 \leq u \leq 2} \left[ \sum_{j=1}^u t_{q, 6+j}^0 - \sum_{j=1}^{u-1} t_{2+q, 6+j}^0 \right] + \sum_{j=1}^2 t_{2+q, 6+j}^0 \right) = \max \left( \max [t_{17}^0, t_{17}^0 + t_{18}^0 - t_{37}^0] + \sum_{j=1}^2 t_{2+q, 6+j}^0 \right) = \max \left( \max [t_{27}^0, t_{27}^0 + t_{28}^0 - t_{47}^0] + t_{37}^0 + t_{38}^0 \right) = \max (6, 9) = 9.$$

Если  $q = 1$ ,  $i = 1$ , то  $E_{1j}^{1,3} = E_{1j}^3 = \sum_{w=1}^j t_{1, 6+w}^0$ ,



$j = \overline{1,2}$ , тогда  $E_{11}^{1,3} = E_{11}^3 = 2$ ;  $E_{12}^{1,3} = E_{12}^3 = 3$ .

Если  $q = 1, i = 2$ , то

$$E_{2j}^{1,3} = E_{3j}^3 = \sum_{\mu=1}^1 \max \left[ \sum_{w=1}^u t_{2(\mu-1)+1,6+w}^0 - \sum_{w=1}^{u-1} t_{2\mu+1,6+w}^0 \right] + \sum_{w=1}^j t_{3,6+w}^0 =$$

$$= \max [t_{17}^0, t_{17}^0 + t_{18}^0 - t_{37}^0] + \sum_{w=1}^j t_{3,6+w}^0 = 2 + \sum_{w=1}^j t_{3,6+w}^0,$$

$j = \overline{1,2}$ , тогда  $E_{21}^{1,3} = E_{31}^3 = 5$ ;  $E_{22}^{1,3} = E_{32}^3 = 6$ .

Если  $q = 2, i = 1$ , то  $E_{1j}^{2,3} = E_{2j}^3 = \sum_{w=1}^j t_{2,6+w}^0$ ,

$j = \overline{1,2}$ , тогда  $E_{11}^{2,3} = E_{21}^3 = 2$ ;  $E_{12}^{2,3} = E_{22}^3 = 4$ .

Если  $q = 2, i = 2$ , то

$$E_{2j}^{2,3} = E_{4j}^{0,3} = \sum_{\mu=1}^1 \max \left[ \sum_{w=1}^u t_{2(\mu-1)+2,6+w}^0 - \sum_{w=1}^{u-1} t_{2\mu+2,6+w}^0 \right] + \sum_{w=1}^j t_{4,6+w}^0 =$$

$$= \max [t_{17}^0, t_{17}^0 + t_{18}^0 - t_{37}^0] + \sum_{w=1}^j t_{3,6+w}^0 = 2 + \sum_{w=1}^j t_{4,6+w}^0,$$

$j = \overline{1,2}$ , тогда  $E_{21}^{2,3} = E_{41}^3 = 4$ ;  $E_{22}^{2,3} = E_{42}^3 = 9$ .

$$\delta_2 = \min_{1 \leq q \leq 2} (T_2^0 - T_q^2) + \min_{1 \leq j \leq 2} \left[ \sum_{w=j+1}^3 t_{2+q,3+w}^0 \right]$$

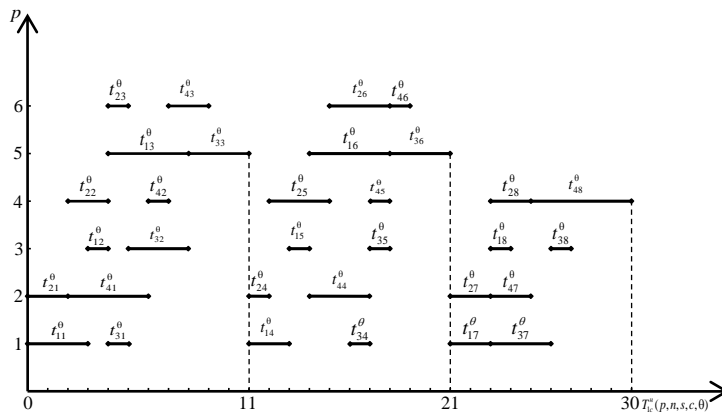


Рис. 4. Несовмещенные диаграммы Ганта при  $s = k \left[ \frac{P}{c} \right] + r$

Fig. 4. Unstacked Gantt charts at  $s = k \left[ \frac{P}{c} \right] + r$

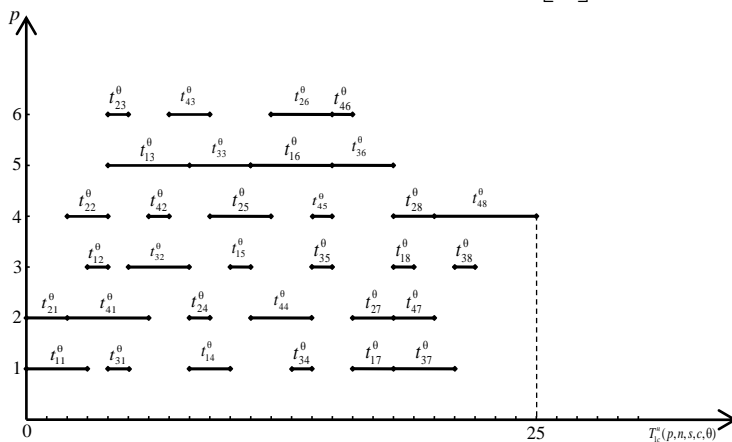


Рис. 5. Совмещенные диаграммы Ганта при  $s = k \left[ \frac{P}{c} \right] + r$

Fig. 5. Stacked Gantt charts at  $s = k \left[ \frac{P}{c} \right] + r$

$$\left. + \sum_{w=1}^{j-1} t_{q,6+w}^0 \right] = \min_{1 \leq q \leq 2} \left( T_2^0 - T_q^2 + \min_{w=2}^3 t_{2+q,3+w}^0, \right. \\ \left. \sum_{w=3}^3 t_{2+q,3+w}^0 + \sum_{w=1}^1 t_{q,6+w}^0 \right) = 4;$$

$$\delta_2'' = \min_{1 \leq q \leq 2} \left( \min_{1 \leq i \leq 2} \left[ T_2^0 - E_{i3}^{q,2} + E_{i1}^{q,3} - t_{i1}^{q,3} \right] \right) =$$

$$= \min_{1 \leq q \leq 2} \left( \min_{1 \leq i \leq 2} \left[ T_2^0 - E_{i3}^{q,2} + E_{i1}^{q,3} - t_{i1}^{q,3}, \right. \right.$$

$$\left. T_2^0 - E_{23}^{q,2} + E_{21}^{q,3} - t_{21}^{q,3} \right] \right) = 2.$$

Следовательно,  $\delta_2 = \min(\delta_2', \delta_2'') = 2$ .

Тогда время выполнения  $n = 4$  неоднородных распределенных конкурирующих процессов, использующих  $c = 2$  копии структурированного на  $s = 8$  блоков программного ресурса в многопроцессорной системе с  $p = 7$  процессо-

рами с учетом дополнительных системных расходов  $\theta$ , будет определяться по формуле

$$T_{1c}^n(7, 4, 8, 2, \theta) = \sum_{\varphi=1}^2 T_{\varphi}^0 + T_3^0 - \delta_1 - \delta_2 = 25.$$

### Заключение

Полученные результаты можно использовать, например, при исследовании асинхронного и второго синхронного режимов взаимодействия процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса, при сравнительном анализе различных режимов распределенных вычислений, при математическом исследовании эффективности и оптимальности мультиконвейерной организации вычислений, при решении задач построения оптимальной компоновки блоков программного ресурса и нахождения оптимального числа процессоров, обеспечивающих директивное время выполнения заданных объемов вычислений.

### Список литературы

1. Антонов А.С., Афанасьев И.В., Воеводин Вл.В. Высокопроизводительные вычислительные платформы: текущий статус и тенденция развития // Вычислительные методы и программирование. 2021. Т. 22. С. 135–177. doi: 10.26089/NumMet.v22r210.
2. Бурдонов И.Б., Евтушенко Н.В., Косачев А.С. Реализация распределенных и параллельных вычислений в сети SDN // Тр. ИСП РАН. 2022. Т. 34. С. 159–172. doi: 10.15514/ISPRAS-2022-34(3)-11.
3. Роби Р., Замора Дж. Параллельные и высокопроизводительные вычисления; [пер. с англ.]. М.: ДМК Пресс, 2021. 800 с.
4. Топорков В.В., Емельянов Д.М. Модели, методы и алгоритмы планирования в грид и облачных вычислениях // Вестн. МЭИ. 2018. № 6. С. 75–86. doi: 10.24160/1993-6982-2018-6-75-86.
5. Zaiets N., Shtepa V., Pavlov P., Elperin I., Hachkovska M. Development of a resource-process approach to increasing the efficiency of electrical equipment for food production. Eastern-European J. of Enterprise Technologies, 2019, vol. 5/8, no. 101, pp. 59–65. doi: 10.15587/1729-4061.2019.181375.
6. Каплун В.В., Штепа В.Н., Прокопеня О.Н. Ресурсно-процессная модель энергоменеджмента локального объекта с несколькими источниками энергии // Вестн. БрГТУ. Сер. Машиностроение. 2019. № 4. С. 86–91.
7. Pavlov P.A. The optimality of software resources structuring through the pipeline distributed processing of competitive cooperative processes. IJMT, 2012, vol. 2, no. 1, pp. 5–10.
8. Коваленко Н.С., Павлов П.А., Овсец М.И. Задачи оптимизации числа процессоров и построения оптимальной компоновки распределенных систем // Вестн. БГУ. Сер. 1: Физика. Математика. Информатика. 2012. № 1. С. 119–126.
9. Kovalenko N.S., Pavlov P.A., Ovseev M.I. Asynchronous distributed computations with a limited number of copies of a structured program resource. Cybernetics and systems analysis, 2012, vol. 48, no. 1, pp. 86–98. doi: 10.1007/s10559-012-9385-z.
10. Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М., 2019. 408 с.

### Synchronous distributed computing at continuous execution of blocks of a limited number of program resource copies

Pavel A. Pavlov <sup>1</sup>✉, Nikolay S. Kovalenko <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Polesky State University, Pinsk, 225710, Republic of Belarus

<sup>2</sup> Belarusian State University, Minsk, 220030, Republic of Belarus

#### For citation

Pavlov, P.A., Kovalenko, N.S. (2024) 'Synchronous distributed computing at continuous execution of blocks of a limited number of program resource copies', *Software & Systems*, 37(1), pp. 43–53 (in Russ.). doi: 10.15827/0236-235X.142.043-053

**Article info**

Received: 14.09.2023

After revision: 28.09.2023

Accepted: 07.11.2023

**Abstract.** When creating multiprocessor distributed computing systems, the problems of constructing and investigating mathematical models for organizing the interaction of processes competing for a software resource are of particular relevance. In this connection, distributed computing tasks related to obtaining mathematical relations, which can have both direct and inverse character, are of interest. When setting direct problems, the conditions are the values of multiprocessor system parameters, the solution is the minimum total time for making given volumes of calculations. The formulation of inverse problems is reduced to calculating multiprocessor system characteristics, searching for criteria of efficiency and optimality of organizing the execution of a set of distributed competing interacting processes. The apparatus of graph theory, linear Gantt diagrams, schedule theory, combinatorial optimization, matrix algebra, etc. is widely used when constructing and studying mathematical models and problems of optimal organization of distributed processes. This paper shows a constructed mathematical model of distributed computations, solves the problems of finding the minimum execution time of heterogeneous processes competing for using a limited number of program resource copies in a synchronous mode in cases of unlimited and limited parallelism in the number of processors of a multiprocessor system. It also uses the ideas of structuring a program resource into linearly ordered blocks with their further conveying by processes and processors of a multiprocessor system.

**Keywords:** structuring, pipelining, program resource, Gantt diagram, Bellman-Johnson functional, synchronous mode, unbounded (bounded) parallelism

**References**

1. Antonov, A.S., Afanasev, I.V., Voevodin, V.I. (2021) 'High-performance computing platforms: Current status and development trends', *Numerical Methods and Programming*, 22, pp. 135–177 (in Russ.). doi: 10.26089/NumMet.v22r210.
2. Burdonov, I.B., Evtushenko, N.V., Kossatchev, A.S. (2022) 'Implementation of distributed and parallel computing in the SDN network', *Proc. of ISP RAS*, 34, pp. 159–172 (in Russ.). doi: 10.15514/ISPRAS-2022-34(3)-11.
3. Robey, R., Zamora, Yu. (2021) *Parallel and High Performance Computing*, Manning Publ., 704 p. (Russ. ed.: (2021) Moscow, 800 p.).
4. Toporkov, V.V., Emelyanov, D.M. (2018) 'Scheduling models, methods and algorithms in grid and cloud computing', *Bull. of MPEI*, (6), pp. 75–86 (in Russ.). doi: 10.24160/1993-6982-2018-6-75-86.
5. Zaiets, N., Shtepa, V., Pavlov, P., Elperin, I., Hachkovska, M. (2019) 'Development of a resource-process approach to increasing the efficiency of electrical equipment for food production', *Eastern-European J. of Enterprise Technologies*, 5/8(101), pp. 59–65. doi: 10.15587/1729-4061.2019.181375.
6. Kaplun, V.V., Pavlov, P.A., Shtepa, V.M., Prokopenya, O.N. (2019) 'Resource-process model of local object energy management with several energy sources', *Bul. Of BrSTU. Ser. Mechanical Engineering*, (4), pp. 86–91 (in Russ.).
7. Pavlov, P.A. (2012) 'The optimality of software resources structuring through the pipeline distributed processing of competitive cooperative processes', *IJMT*, 2(1), pp. 5–10.
8. Kovalenko, N.S., Pavlov, P.A., Ovseev, M.I. (2012) 'The tasks of optimizing the number of processors and building an optimal layout of distributed systems', *Bul. of BSU*, (1), pp. 119–126 (in Russ.).
9. Kovalenko, N.S., Pavlov, P.A., Ovseev, M.I. (2012) 'Asynchronous distributed computations with a limited number of copies of a structured program resource', *Cybernetics and Systems Analysis*, 48(1), pp. 86–98. doi: 10.1007/s10559-012-9385-z.
10. Lazarev, A.A. (2019) *Theory of Schedules. Methods and Algorithms*, Moscow, 408 p. (in Russ.).

**Авторы****Павлов Павел Александрович**<sup>1</sup>,

к.ф.-м.н., доцент,

pavlov.p@polessu.by

**Коваленко Николай Семенович**<sup>2</sup>,

д.ф.-м.н., профессор,

kovalenkons@rambler.ru

**Authors****Pavel A. Pavlov**<sup>1</sup>,

Cand. of Sci. (Physics and Mathematics),

Associate Professor, pavlov.p@polessu.by

**Nikolay S. Kovalenko**<sup>2</sup>,

Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Professor,

kovalenkons@rambler.ru

<sup>1</sup> Полесский государственный университет,  
г. Пинск, 225710, Республика Беларусь<sup>2</sup> Белорусский государственный университет,  
г. Минск, 220030, Республика Беларусь<sup>1</sup> Polesky State University,  
Pinsk, 225710, Republic of Belarus<sup>2</sup> Belarusian State University,  
Minsk, 220030, Republic of Belarus